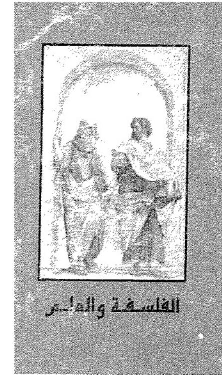
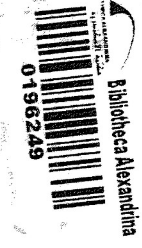


فلسفة الرياضة

5

د. محمد ثابت الفندى







الهيئة العامة لقصور الثقافة

5
الفلسفة والعل

فلسفة الرياضة

د. محمد ثابت الفندى

تقديم

د. على عبد المعطى

• تصميم الغلاف : عمـــر جهـــان •

• شعار السلسلة : تفصيل من لوحة رفائيل "مدرسة الحكمة"

المراسلات

باسم مدير التحرير على العنوان التالى :

١٦أ ش أمين سامى - القصر العينى

القاهرة - رقم بريدى : ١١٥٦١

الفلسفة والعلم

سلسلة

تعنى بنشر الكتابات
الفلسفية والعلمية

الهيئة العامة لقصور الثقافة

تصـــديـــر

هناك الكثير من القيم (المطمورة) فى واقعنا المعاصر.. فقد تُطمر قيمة ما، لتجاهلنا وانعدام عنايتنا بتفحُّص ما يمتلىء به واقعنا الزاخر.. وقد يأتى (الطمر) متعمدا، فكثيرا ما يلتفّ جدار من الصمت المتعمد حول قضية ما، أو شخص ما. وقد تطمر بعض القيم، فى غمرة اندفاعنا اليومى المتهوس، المقترن بتدفق إعلامى أكثر تهوساً؛ مما لا يدع لنا المجال لوقفة تأمل أو لحظة تدبر.. وهكذا؛ تعددت الأسباب، والطمر واحد.

وقد كان اختيارنا لكتاب (فلسفة الرياضة) ليصدر ضمن كتب هذه السلسلة واسعة الانتشار.. محاولة لنفض التراب عن قيمة مهمة فى واقعنا المعاصر، كادت تطمرها الأسباب والعلل سالفة الذكر؛ تلك القيمة، هى شخصية الدكتور محمد ثابت الفندى، وكتابه الرائد .

***

عرفت المرحوم الدكتور ثابت الفندى، فى مطلع التسعينيات، وكان

هو على وشك الدخول فى التسعينيات من عمره! وقد كنت قبلها أظنه قد توفى من زمن.. حملّنى ساعتها أحد أساتذتى، رسالة إلى الدكتور الفندى؛ فتعجبت متسائلا : ألم يمت منذ سنوات؟! ضحك الأستاذ وأخبرنى بأن عالمنا الجيل حىٌّ يرزق، بيد أنه معتكف بمنزله منذ سنوات .

كان المنزل / الخلوة، قريبا جدا من كلية الآداب. وصلت بعد دقيقتين فاستقبلنى الدكتور/ المتوحد، مستبشرا باشًّا . وامتد اللقاء الأول لساعتين - وتعددت من بعده اللقاءات - وراح يحدثنى عن دقائق التصوف ورقائق شئون الأولياء.. وفى غمرة الانهماك والتطواف بتلك الدقائق والرقائق، ابتدرته بسؤال وقع منه موقعا : أليس تخصص سيادتك فى فلسفة العلم؟!

قال الدكتور الفندى : التصوف يا بنى، هو حياة القلب والروح.. وللعقل شئون أُخر، ومن تلك الشئون؛ الفلسفة والعلم..هذا عالَم، وذاك عالم آخر.والعَالِم، يابنى ، يلتقى عنده العالَمان.

فى لقاء تالٍ حدثنى الدكتور الفندى عن اعتزازه بكتابه (فلسفة الرياضة) قال ما معناه، إنه حين وضع هذا الكتاب فى اللغة العربية، لم تكن الثقافة العربية على امتداد رقعتها تعلم شيئا من فلسفة العلوم، وصار الكتاب مرجعا علميا فى أوروبا، ولم تنتبه إليه المجامع

والجامعات العربية إلا بعد ذلك بسنوات طويلة .

ولم يكن الكتاب آنذاك متيسرا، وكان الحصول على نسخة منه؛ بتعبير تراثى قديم : أعز من الكبريت الأحمر؛ وكان رحمه الله يتمنى أن يرى طبعة واسعة الانتشار من هذا الكتاب الرائد.. وها هى الطبعة تصدر، ولكن بعد وفاته بسنوات.

وقد رأيت أن يقدم الكتاب، أحد تلامذة المرحوم الدكتور محمد ثابت الفندى، فاستجاب لذلك مشكورا (الدكتور على عبد المعطى) وهو من الجيل الثانى فى سلسلة الأجيال التى تخرجت علميا على يد المرحوم الدكتور ثابت الفندى بجامعة الإسكندرية.. وكتب الدكتور على عبد المعطى هذه المقالة المطولة، لتكون بمثابة «إزاحة الستار» عن شخصية عالمنا الجليل. ومن بعد ذلك يأتى نص الكتاب، فى هذه الطبعة التى تصدر بعد قرابة نصف قرن من أول إصدار لكتاب فلسفة الرياضة .

د. يوسف زيدان

ثابت الفندى

(مسيرة حياة وفكر)

د. على عبد المعطى

ولد الدكتور **محمد ثابت الفندى** بأبى تيج من أعمال محافظة أسيوط فى ١٤ أغسطس عام ١٩٠٨، وبعد أن تدرج فى سلم التعليم فى بلدته سافر إلى القاهرة حيث حصل من جامعتها على الليسانس فى الآداب تخصص الفلسفة عام ١٩٣١، وعلى درجة الماچستير فى الفلسفة ١٩٣٢، ثم سافر مبعوثا إلى باريس حيث حصل هناك على درجة الليسانس فى الآداب عام ١٩٣٧ فدبلوم الدراسات العليا عام ١٩٣٨ فدرجة دكتوراه فى الفلسفة من السربون بمرتبة الشرف الممتازة عام ١٩٤٥ وذلك بعد أن تقدم برسالتين، الأولى حول الأسس الفلسفية والمنطقية فى العلوم الرياضية، والثانية حول القضايا الموجهة فى البحوث المنطقية المعاصرة .

عاد ثابت **الفندى** إلى جامعة الاسكندرية، حيث عين فى وظيفة «مدرس أ» فى الدرجة الرابعة فى عام ١٩٤٥ ورقّى إلى وظيفة «أستاذ مساعد ب» فى الدرجة الثالثة عام ١٩٤٨، وإلى وظيفة «أستاذ مساعد: أ» فى الدرجة الثانية عام ١٩٥٠، وقد اقترح مجلس الكلية بجلسته المنعقدة فى ٢٣ يناير عام ١٩٥١ تشكيل لجنة علمية فى استحقاقه لدرجة الأستاذية مكونة من الدكتور أبو العلا بك عفيفى رئيس قسم الفلسفة بجامعة الاسكندرية آنذاك، والأستاذ إبراهيم اللبان عميد كلية دار العلوم وأستاذ الفلسفة بها والأستاذ

الدكتور إبراهيم بيومى مدكور عضو مجلس الشيوخ فى تلك الآونة، وانتهى التقرير إلى أنه جدير بالترقية إلى وظيفة الأستاذية باعتباره الأستاذ المصرى الوحيد المتخصص فى المنطق الرياضى وتمت ترقيته عام ١٩٥٢ .

عين بعد ذلك رئيسا لقسم الفلسفة فعميدا لكلية الآداب فى الفترة من عام ١٩٦١- ١٩٦٥ وفى أثناء ذلك شغل منصب ممثل الحكومة المصرية فى اليونسكو عام ١٩٤٧ ثم ممثلا لليونسكو فى الأمم المتحدة عام ١٩٤٨، وعضوا باللجنة التحضيرية للميثاق الوطنى فى عام ١٩٦١، وعضو المجلس الأعلى للآداب والعلوم الاجتماعية، ورئيس هيئة الآداب والفنون والعلوم الاجتماعية فى الإسكندرية ما بين عامى ١٩٦١ - ١٩٦٥.

وفى عام ١٩٦٦ سافر الدكتور **ثابت الفندى** إلى بيروت حيث عين هناك عميدا لكلية الآداب حتى عام ١٩٨٤، وعين بعد ذلك أستاذا متفرغا بقسم الفلسفة بكلية الآداب جامعة الإسكندرية حتى وفاته، كما اختير عضوا لمجلس الكلية لأعوام عديدة متصلة .

وقد قدم الدكتور **محمد ثابت الفندى** إلى المكتبة العربية عددا من المؤلفات المتنوعة أهمها :

* كتاب الطبقات الاجتماعية (مطبوع باللغة العربية) مصر -

مارس ١٩٤٩ .

* المفكرون الكلاسيكيون العرب (بحث بالفرنسية نشر فى مجلة اليونسكو) - ديسمبر ١٩٤٨ .

* الفولكلور فى ضوء علم الاجتماع (بحث بالعربية قبل للنشر بمجلة الكلية) سنة ١٩٥٢.

* وثيقة عن حقوق الإنسان (باللغتين الإنجليزية والفرنسية، نشر فى مجلة اليونسكو) عام ١٩٤٨.

* وثيقة عن الديمقراطية ومعانيها عند مفكرى الأمم المختلفة قديما وحديثا، ونشر فى مجلة اليونسكو عام ١٩٤٨.

*أصول المنطق الرياضى (دار المعرفة الجامعية) عام ١٩٩٠.

* مناهج البحث العلمى : محاضرات (نشرت ببيروت) عام ١٩٨٠.

* تحقيق لكتاب قوى النفس الناطقة وأحوالها لابن سينا.

* كما شارك مع زميليه إبراهيم زكى خورشيد وأحمد الشينتاوى فى ترجمة دائرة المعارف الإسلامية .

* فلسفة الدين عند الغزالى .

* فلسفة الرياضة .

كان الدكتور **ثابت الفندى** أول من شارك في تأييد ثورة ١٩٥٢،

فوقع أول برقية تأييد مع أستاذين آخرين باسم جامعة الاسكندرية إلى مجلس قيادة الثورة، وذلك فى وقت كان من المحال فيه معرفة مصير الثورة ومصير رجالها، لقد كان يشعر شعورا داخليا صادقا بأن الظلم لا يمكن أن يستمر، وأن الفساد لايمكن أن يبقى، فراح يعلن تأييده المطلق للثورة باعتبارها بطلا منتظرا سوف تتحقق آمال المواطنين على يديه .

لم يعرف **ثابت الفندى** التسلط أو التعسف فى استخدام السلطة مع أن سلطة العميد آنذاك كانت شبه مطلقة، لقد كان على العكس من ذلك، يعامل الآخرين كغايات لا كوسائل على نهج الفيلسوف كانط.

بيد أنه فى فترة من فترات حياته، دخل محراب التصوف فترك المنطق، وهاجر فلسفة العلوم متطلعا إلى معرفة أسمى وإلى نوع فريد من الإدراك، يعتمد على التذوق الوجدانى، وهو ما سنوضحه فى السطور التالية من تطور فى حياته الفكرية .

بدأ **ثابت الفندى** الشاب حياته الجامعية الأولى وهو منغمس انغماسا شديدا فى مجالى فلسفة العلوم والمنطق الرياضى. وكان يرى فى هذين المجالين دقة فائقة، وأحكاما يستحيل أن تصل إليه فروع الفلسفة الأخرى. فانكب على هذين الفرعين وأنتج فيهما نتاجا

طيبا مثمرا حتى أنه أصبح أول من كتب باللغة العربية في مصر والبلاد العربية فى هذا الإطار.

وفي هذا الصدد صدر للدكتور **ثابت الفندى** كتابه الفائق الدقة عن فلسفة الرياضة، وعن هذا الكتاب يقول «انه فيما أعلم أول دراسة بالعربية في موضوع جليل شغل الفكر الغربى طويلا وما زال يشغله وهو موضوع (أسس الرياضة) على حد اصطلاح الرياضيين، أو فلسفة الرياضة كما اصطلح الفلاسفة والمتفلسفون من الرياضيين».

بدأ ثابت الفندى كتابه «فلسفة الرياضة» بالتمهيد لفلسفة العلوم، والحديث عن موضوعات الرياضة ونشأتها ومنهجها، ثم انتقل إلى حركة النقد الذاتى فى الهندسة وما نجم عنها من ظهور الهندسيات اللاإقليدية، وما ترتب على ذلك من ظهور «الأكسيوماتيك» أى حركة تأسيس المسلمات الهندسية والتى تبتعد تماما عن الحدث المكانى، عارضا بعد ذلك للجبر والهندسة التحليلية مبينا دور الأعداد التخيلية فى تحسيب الرياضة وإمكانية ردها إلى الأعداد الصحيحة ويأتى الفصل الأخير من هذا الكتاب لكى يعرض فيه أهم المذاهب المعاصرة التي تناولت أسس الرياضة كالمذهب اللوجستيقى ونظرية حساب القضايا الأولية. واشتقاق العدد أو نظرية الحساب من ثوابت المنطق، والمذهب الاكسيوماتيكى، والمذهب الحدسى، وقد جاء كل ذلك

بعبارات محددة، وكلمات دقيقة.

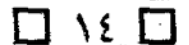
ويأتى كتاب **ثابت الفندى** «أصول المنطق الرياضى» امتدادا لهذا الاتجاه المتعمق فى الرياضيات والمنطق، وهو يعد أيضا أول مؤلف بالعربية فى علم المنطق الرياضى المعاصر المسمى «لوجستيقا».

وهو يعرض فى الفصل الأول فى كتابه القيم هذا لأهمية المنطق فى الفلسفة وانقسامه إلى صورى ومادى، منتهيا، إلى أن دراسة المنطق الصورى فى صورته الرياضية إنما تكون عن طريقين:

الطريق الأول : ويبدأ بالرياضة البحتة، تطورها ونقد أصحابها لأسسها ومبادئها التقليدية واصطناعهم لطرق جديدة لتأسيس علمهم فتأدى من ذلك إلى المنطق الجديد، وهذا هو طريق الرياضيين، وفيه مشقة على الفيلسوف.

أما **الطريق الآخر** فهو طريق الفيلسوف ويبدأ من الفلسفة ذاتها خاصة من تاريخ المنطق الصورى، فيبين كيف أنه نشأت فيه عبر القرون عند فلاسفة كثيرين نزعات هامة هى من أخص خصائص اللوجستيقا المعاصرة، جعلته يتحول شيئا فشيئا إلى علم رياضى رصين.

ويقارن الدكتور **الفندى** فى الفصل الثانى بين منطق الفلاسفة وبين اللوجستيقا مؤكدا أن الاختلاف قائم بينهما من ناحية الموضوع



والمنهج والغرض، فموضوع المنطق الصورى هو صور الاستنباط ومن ثم صور القضايا التى تتألف الاستنباطات منها.

ويذكر أن المنطق يجب أن يستعمل الرمز كمنهج لكي يصبح حسابا كأخته الرياضة، كما يجب أن يكون نسقا استنباطيا لكى يبرهن بالاستنباط قضاياه أو قوانينه .

ويعالج الدكتور **الفندى** فى الفصل الثالث وعنوانه «المنطق وعلم النفس» حقيقة الصلة بين المنطق وعلم النفس وينتهى بعد دراسة وتحليل عميقين لأواصر تلك الصلة إلى خاصية هامة جدا من خصائص اللوجستيقا تكمن فى أنه علم عار بالمرة من نزعة السيكولوجية وعيوبها لأنه لا يفترض أدنى معرفة سيكولوجية أو حتى مجرد افتراض وجود عقل أو إنسان .

ويميز بين العلمين : المنطق وعلم النفس على النحو التالى :

المنطق شيء مجرد وصورى، بينما ينصب علم النفس على شيء مشخص، فالحياة الفكرية بحذافيرها وفى وجودها المشخص هى موضوع الحلم لعلم النفس، فإذا ما جردناها عن محتوياتها فنحن فى مجال المنطق .

وكما أكد المنطق الرياضى استقلاله عن علم النفس، فإنه يؤكد استقلاله عن الفلسفة أيضا، وهذه خاصية من خواصه المميزة له،

وتلك النقطة يبحثها الدكتور **الفندى** فى الفصل الرابع الخاص بالمنطق والميتافيزيقا إذ يقرر أن المنطق الرياضى لايمكن أن يعتبر مستقلا عن الميتافيزيقا، شأنه شأن المنطق دائما لا غنى له عن أرضية ميتافيزيقية يستند إليها مهما كان الأمر .

ويدلل الدكتور **الفندى** على تلك الصلة الوثيقة بين المنطق والفلسفة على النحو التالى :

١- لايمكن إقامة منطق صورى حتى فى شكله الرياضى إلا على أساس من النظرات والأفكار الميتافيزيقية.

٢- إن المنطق فى أية صورة له، رياضيا كان أم غير رياضى، هو جوهر الفلسفة ولا سبيل إلى التفلسف بدون منطق.

ويؤكد الدكتور الفندى - على عكس اللوجستقيين - أن هناك تأثرا متبادلاً لا مناص فيه بين المنطق والميتافيزيقا وهذا هو الذى نوع الفلسفات ونوع المنطق أيضا، فهناك أنوا ع عديدة من المنطق غير الصورى وغير الرياضى عرفتها الفلسفات المتلاحقة وعبرت بها عن مدى احتجاجاتها المستمرة على المنطق الصورى الأرسطى الذى استأثر وحده باهتمام الفلسفة عبر التاريخ.

وفى الفصل الخامس يعرض **الفندى** للمذاهب التي أقامت الصلة بين المنطق والرياضة وهى : مذهب التشابه الظاهرى ومذهب جبر

المنطق، والمذهب اللوجستيقى والمذهب الأكسيوماتيكى والمذهب الحدسى الجديد .

ثم ينتقل فى الفصل السادس للحديث عن اللوجستيقا, أقسامه وتعريفه ورموزه، كالثوابت والمتغيرات ويتناول فى الفصل السابع خصائص اللوجستيقا وهى إمكانية تكوينه على هيئة نسق استنباطى من حيث أن اللوجستيقا بمثابة نظرية حسابية لقوانين الاستنباط .

أما الفصل الثامن فيعرض فيه الاستعراض الفلسفى لمنطق **راسل**، ذلك أن الأبحاث المنطقية قد تطورت كثيرا منذ كتابات **راسل** وستظل أبحاثه نقطة البداية التي لا غنى عنها والأساس الكلاسيكى لكل الأبحاث اللاحقة .

ولقد جدول **راسل** الاستعراض الفلسفى للمنطق الرياضى فى مؤلفه : Principles of Mathematics أما الاستعراض الرياضى للمنطق فقد تناوله فى كتابه الذى ألفه بالاشتراك مع **هوايتهد** وهو أصول الرياضة Principia Mathematica.

ويعرض **الفندى** فى الفصل التاسع لنظرية حساب القضايا الابتدائية باعتبارها نقطة البدء فى اللوجستيقا بدلا من التصورات التى يبدأ منها المنطق التقليدى ثم يعرض لحساب القضايا الابتدائية فى صورته الرياضية كنسق استنباطى .

ويشرح فى الفصل العاشر طريقة الجداول فى حساب القضايا الابتدائية، أما الفصل الحادى عشر فيعرض فيه للمنطق الكثير من القيم طبقا عليه طريقة الجداول .

وفى مرحلة ثانية من حياة **ثابت الفندى** الفكرية نجده يحاول الفكاك من الدائرة الأولى التى اهتم فيها اهتماما كبيرا بعلوم المنطق والرياضة أو بالعلوم المضبوطة لكى يجد نفسه فى محراب الدائرة الثانية التي هاجم فيها ما أسماه باللافلسفة حينا وبمرض الفلسفة أحيانا ثانية. وتحتوى قائمة اللافلسفة عنده على السفسطة وفلسفة الشك المطلق والنزعات المادية والوضعية المنطقية وفلسفة التحليل وعلى كل اتجاه يحاول القضاء على الميتافيزيقا التى تمثل لديه قلب الفلسفة النابض، ووجدانها الثرى بالإيقاعات، وهى تتجدد دوما تجاه ما هو مفارق.

يقول **ثابت الفندى** «إن كلمة الميتافيزيقا.. تدل على ذلك الجزء التقليدى من الفلسفة الذى يتناول مسائل الوجود المطلق (الانتولوجيا) والوجود الواجب (الإلهيات) والوجود الممكن (العالم) ووجود الروح أو النفس وخلودها لذلك فهى كلمة تشرئب لها الأعناق عند سماعها، وتثير كوامن المشاعر المختلفة التى قلما تشف عن شىء آخر غير الظمأ الشديد إلى معرفة أكثر مما نملك وأبعد مما

لدينا بكل الطرق الأخرى وعلى رأسها العلم» .

ويرى **الفندى** أن الميتافيزيقا بهذا المعنى قد تم رفضها ومحاربتها بواسطة تيارين كبيرين أحدهما التيار المادى الذى يجتث دواعى قيام الميتافيزيقا من أساسها باجتثاث تعدد درجات الوجود وقصرها على الوجود المادى وحده، وبذلك لا يكون هناك كلام عن الروح أو عن الألوهة، وهذا التيار المادى يقابله الاتجاه الروحى Spritualism المميز للميتافيزيقا، أما التيار الثانى والأهم والأوضح صلة بنظرية المعرفة فهو التيار الذى وقع تحت تأثير منهج العلوم أو بصفة أعم الذى تمسك بالتجربة الحسية كمصدر وحيد للمعرفة وبذلك ينكر على الميتافيزيقا أن تكون معرفة لأن موضوعاتها لايمكن أن تقع تحت طائلة التجربة الحسية، وهذا التيار اتخذ لنفسه أسماء عديدة تختلف باختلاف أصحابها كالوضعية الجديدة والوضعية المنطقية وفلسفة اللغة وفلسفة التحليل .

تقوم الفلسفة المادية على قضية أساسية مؤداها أنه لا توجد إلا المادة وتغيراتها أو المادة والحركة، وهذه التغيرات وتلك الحركات ماهى إلا كيفيات تتصل بالمادة أكبر اتصال، وهو يضع قائمة عرضة لتلك الفلسفات المادية التي تنكر النفس والروح والألوهة وتقتصر علي ما هو مادى وحسب، تبدأ هذه القائمة بفلسفات **ديموقريطس**

وأنبادوقليس وأبيقور فى الفلسفة القديمة، وبفلسفات **جاسندى** و**هوبز** مع بدايات الفكر الفلسفى الحديث ويضم إليها مدرسة **بافلوف** Pav-lov **وبشتريف** Pechterev التى اعتبرت الإنسان كالحيوان مجرد آلة تقوم بردود فعل منعكسة مع المثيرات الخارجية بطريقة آلية محضة، كما نجد فى قائمة الماديين **فيبر** Weber **وفشنر** Fechner وهما قد ردا الحياة النفسية للإنسان فى ضوء المؤثرات الطبيعية على الأعضاء، كما نجد المدرسة السلوكية عند **واطسن** و**فرويد** وغيرهما من علماء النفس الذين يدرسون «النفس من غير نفس» على حد تعبير **هفدنج** .

وتضم قائمة الماديين **كارل ماركس** و**إنجلز** وغيرهما من أصحاب نظرية المادية الجدلية والمادية التاريخية. فيقول **ماركس** فى كتابه رأس المال «يرى **هيجل** أن حركة الفكر ، هذه الحركة التى يشخصها ويطلق عليها اسم الفكرة هى الإله (الخالق، الصانع) للواقع. أما أنا فأرى العكس، إن حركة الفكر ليست إلا انعكاسا لحركة المادة منقولة إلى دماغ الإنسان ومتحولة فيه .

ويقول إنجلز «إن وحدة العالم ليست فى كيانه، بل فى ماديته. ولا يوجد قط، ولا يمكن أن يوجد أبدا فى أى مكان، مادة بدون حركة، ولا حركة بدون مادة» .

وتقوم المادية الجدلية عند **ماركس** على قوانين ثلاثة هى :

١- قانون وحدة الأضداد وصراعها : كل شىء طبيعى، وكل ظاهرة تشتمل على طرفى تضاد، ولا يمكن أن يظل هذان الطرفان فى سلام، فمن المحتم أن يتولد الصراع بينهما، وهذا الصراع لا يقضى على وحدة الشىء أو الظاهرة، بل يفضى إلى تغلب الطرف المعبر عن التقدم على الطرف الآخر فيحدث التحول، وهذا هو السبيل إلى التطور. ويرى **ماركس** أننا نجد فى الشىء الواحد الحار والبارد الصلابة، والليونة الحياة والموت، اليقظة والنوم، الأنانية والغيرية، وأن التحول يحدث حينما يتغلب طرف على الآخر دون القضاء على وحدة الشىء. وبالتطبيق على الواقع السياسى نجد أن المجتمع الرأسمالى يشتمل على البروليتاريا والبرجوازية، وكل طبقة منهما تفترض وجود الطبقة الأخرى على الرغم من تضادهما إذ أنهما يؤلفان وحدة النظام الرأسمالى .

٢- قانون الانتقال من التغير الكمى إلى التغير الكيفى الذى يوضح كيف يسير التطور، فالتغير الكمى يحدث من ناحية المقدار، أما التغير الكيفى فيحدث من التحول فى الكيف أو الصفات، ويرى ماركس أنه عندما تتراكم التغيرات الكمية وتتزايد فإن التغير الكيفى لا يلبث أن يتم. كما يرى أنه إذا اختفت الملكية الرأسمالية وهى

الكيفية الأساسية للنظام الرأسمالى، وحلت محلها الملكية الاشتراكية فـإن نظامـا جـديدا يحل مـحل النظام الرأسـمـالى وهـو النظام الاشتراكى. وبينما يحدث التغير من الرأسمالية إلى الاشتراكية فجأة أي بالانقلاب الثورى المباغت، نجد أن الانتقال من الاشتراكية إلى الشيوعية لايتم فجأة بل بالتغير المستمر البطىء.

٣- قانون سلب السلب : ويكشف عن الاتجاه العام للتطور فى العالم المادى، فتاريخ المجتمع الإنسانى يتألف من حلقات نفى أو سلب النظم الجديدة للنظم القديمة. فقد قضى مجتمع الرقيق على المجتمع الشيوعى البدائى، وقضى مجتمع الإقطاع على مجتمع الرقيق وقضت الرأسمالية على مجتمع الإقطاع، ثم قضى المجتمع الاشتراكى على مجتع الرأسمالية. وكل نظام يشتمل فى نفسه على مبادىء كامنة فى ذاته تكون السبب فى القضاء عليه، فالمجتمع الرأسمالى يحوى فى ذاته على مبادىء انهياره، ولا يعنى السلب أن الجديد ينسخ القديم كله، بل الواقع أنه يستبقى من القديم أفضل ما فيه فيدمجه فى الجديد، ويرفعه إلى أعلى، وإذن فالتطور هو استمرار تغلب الجديد على القديم إلى ما لا نهاية .

أما المادية التاريخية فترى أن المجتمع يتطور ويتقدم طبقا للتنظيم الاقتصادى ولأساليب الإنتاج أو المادة بوجه عام. ويرى **ماركس** أن

الإنتاج المادى هو أساس تطور المجتمع، وأن العمل هو أساس الحياة الوجود.. ويرى **ماركس** أن الدراسة التاريخية للمجتمع كشفت عن خمسة أشكال أو صور متعاقبة لأساليب الإنتاج، وأن المجتمعات تمر بهذه الأشكال الخمسة وهى :

المجتمع الشيوعى البدائى، ومجتمع الرقيق، ومجتمع الإقطاع، والمجتمع الرأسمالى، والمجتمع الاشتراكى، وهذا المجتمع الأخير يرى **ماركس** أنه سينتهى حتما إلى المجتمع الشيوعى حيث لا طبقات ولا فوارق ولا ملكيات خاصة .

ويرى **ماركس** أن المادية التاريخية ترينا أن المجتمع الإنسانى الذى ابتدأ بالنظام الشيوعى لابد وأن ينتهى حتما إلى النظام الشيوعى، وأن كل نظام جديد يحتفظ لنفسه طبقا لقانون سلب السلب ببعض خصائص النظام الذى سبقه .

ويضم **ثابت الفندي** الفيلسوف الإنجليزى الشهير **برتراند راسل** إلى تلك القائمة، بسبب إنكاره إمكان معرفة وجداننا أو فكرنا معرفة مباشرة، ثم يختتم استعراضه لتلك المذاهب المادية بقوله «إن المذاهب المادية على اختلافها اجتثت الميتافيزيقا من جذورها باجتثاث موضوعاتها التى تتجاوز المادة وليس هذا أخطر ما فيها لأن اجتثاث الإنسان من جذوره الروحية أدهى وأمر. فالمشكلة فيها مشكلة

الإنسان نفسه لا الميتافيزيقا، هل هو كائن حى كمادة حية، أم هو إنسان له فكر وقيم خلقية وحضارية ومطامح أخروية فينسب إلى ما يعلو فوق المادة الحية وإلى الخلد وإلى الألوهة؟» .

فإذا انتقلنا الآن إلى التيار الثانى الذى نقده **الفندى** نقدا عنيفا وهو تيار الوضعية المنطقية وفلسفة التحليل لرأيناه يصف هذا التيار بأنه تيار لافلسفى رافض للميتافيزيقا صنفه بعض مؤرخى الفلسفة تحت اسم الوضعية المنطقية New positivism ولكن مؤسسيه أطلقوا على أنفسهم أول أمرهم اسم **جماعة فيينا** أو **دائرة فيينا** Vienna Cercle نسبة إلى هذه المدينة التي تركزوا فيها، وضمت الجماعة أسماء مثل **مورتس شليك** Schlick **وريشنباخ** Reichen-bach **وكارناب** Carnap **وهانز هان** Han **ونيرات** وغيرهم، وسموا مذهبهم بأسماء كالوضعية المنطقية Logical positivism والتجريبية الجذرية Radical empiricism والمذهب الفيزيائى physicalism . وأخيرا فى المهجرالأمريكى باسم العلم الموحد United Science أما عند أنصاره فى انجلترا فقد كان الاسم المفضل هو الوضعية المنطقية فى بداية الأمر، ثم فلسفة اللغة وفلسفة التحليل philosophy of Analysis وضم أسماء مثل **سوزان ستبنج** Stebbing **ودنكان جونز** Duncan jones **وميس** Mace وأهمهم جميعا **آير** Ayer. ولكن

سرعان ما انشقت الحركة على نفسها فى أمريكا بسبب تنبه **ريشنباخ** إلى قصورها وإلى نقاط الضعف فيها. كما أن الحركة فترت تماما وانتهت بعد طنطنة ومؤتمرات دولية دعائية مكثفة فى بدايتها خلال السنوات العشرة السابقة على الحرب العالمية الثانية، إذ نبذ **آير** الوضعية وعاد إلى الميتافيزيقا .

ويرى **الفندى** أن هناك سمات مشتركة تصف هؤلاء منها تعصبهم ضد الميتافيزيقا وانحيازهم للعلم وارتكازهم على تجربة **هيوم** وربط أفكارهم بالمنطق الرياضى كما اضطر عند **راسل وفنجنشتين** ولقد انتهوا إلى القول بأنه لا يوجد غير مصدر واحد للمعرفة هو التجربة الحسية التى تعتمد على ما هو مادى وحسب.

ومن الناحية التاريخية البحتة بدأت المرحلة الإنجليزية التى تقع تحت اسم فلسفة التحليل حينما انتهى عصر ازدهار الوضعية الجديدة فى فيينا والذى لم يلبث طويلا. وفلسفة التحليل ترتكز أساسا على فلسفة **جورج مور** الذى كان عدواً لدوداً للأبحاث الميتافيزيقية، والذى ناصر القضايا المشخصة أو الجزئية التى تبتعد عن كل ما هو كلى وعام .

لقد استهدفت الفلسفة التحليلية بقول **الفندى** «تحليل الوقائع أو القضايا المعبرة عن العلم إلى أبسط مكوناتها بقصد «توضيحها»

Clarification ومن أهدافها أيضا جعل الفلسفة «علمية» بمعنى أن يتناول الفلاسفة مسائل يمكن أن تُحل أو يُبت فيها بدلا من إثارة مشاكل كبرى لا أمل فى حلها. وطريقة الوصول إلى ذلك أن تؤخذ المسائل مسألة.. مسألة بدلا من أن تعالج كلها معا».

ويعطينا **الفندى** مثالا آخر للفلسفة التحليلية هو الفرد حول **آير** Ayer الذى حاول تحرير الفلسفة من الميتافيزيقا على أن تترك للعلم التجريبى البحث عن الظواهر وتقنع هى بتحليل اللغة العلمية وتوضيح قضايا العلوم التجريبية وذلك بأن تترجمها إلى قضايا ذات مضامين حسية Sense Contents بواسطة «مبدأ التحقيق» Verifi- cation principle المعروف فى الوضعية المنطقية، للكشف عن قيمة الصدق فى التركيب اللغوى للقضية .

وينتهى **ثابت الفندى** إلى أن مثل هذه التيارات التى حاولت استبعاد الميتافيزيقا التى أكدت وجود الله وخلق العالم وحرية الإرادة وخلود النفس وكل القيم التي حارب الإنسان من أجلها واستهدف تحقيقها والوصول إليها لم يكتب لها النجاح، واعتبرت مجرد محاولات سطحية لم تلبث أن اكتُشف زيفها، ومن هنا ظهرت تيارات جديدة عادت بنا إلى الفلسفة الحقة مثل الفلسفة الفينومينولوجية وفلسفات الوجود المعاصرة وفلسفة الحدس عند **برجسون** وغيرها.

وهكذا اضمحل تصور الفلسفة عند هؤلاء التحليليين إلى حد أنها أصبحت طفيلية على العلم، ولا سبب لوجودها إلا قيام العلم، والعلم نفسه فى غنى عن توضيحاتها وكل ذلك من أجل استبعاد الميتافيزيقا الأنتولوجية التى أكدت وجود الله، وحدوث العالم، وحرية الإرادة وخلود النفس، وانتهى بهم الأمر إلى اعتبارها مرضا لغويا فى العقل يجب الشفاء منه بالمنطق ولكن الله شفى الفلسفة منهم .

المراجــع

١- إنجلز : (ضد دوهرنج) ت : فؤاد أيوب، دار دمشق - ط ٥ - ١٩٨١ .

٢- ماركس : (رأس المال) المجلد الأول، دار التقدم ، موسكو - ت : فالح عبد الجبار وأخرون -١٩٨٧

٣- ثابت الفندى : (فلسفة الرياضة) دار المعرفة الجامعية - ١٩٨٧.

٤- ثابت الفندى : (أصول المنطق الرياضى) دار المعرفة الجامعية - ١٩٨٩

٥- ثابت الفندى : (مع الفيلسوف) دار النهضة العربية - ١٩٨٠.

مقدمة الكتاب

بسم الله الرحمن الرحيم

وبه نستعين.. والصلاة والسلام على سيد المرسلين .

وبعد فهذه فيما أعلم أول دراسة بالعربية فى موضوع جليل شغل الفكر الغربى طويلا وما زال يشغله وهو موضوع «أسس الرياضة» على حد اصطلاح الرياضيين أو «فلسفة الرياضة» كما اصطلح الفلاسفة والمتفلسفون من الرياضيين .

والكتب الغربية الكثيرة فى هذا الموضوع تعانى إما من السطحية، وإما من التعقيد الفني. والعرض السطحى يشوّه ولا ريب المسألة العلمية ويفقدها قيمتها. أما التعقيد الفنى فأمر يهم الرياضيين.

ولذلك فإن هذه الدراسة البحتة التى أخص بها الفلاسفة قبل غيرهم، كان لابد أن تتحاشى الجوانب الفنية كما يعرضها الرياضيون فى أبحاثهم، وكان لابد أن توطِّىء المسائل على النحو التالى الذى اتبعته هنا.

فإلى قراء الفكر المعاصر أقدم هذه الخلاصة فى فلسفة الرياضة.

د. محمد ثابت الفندى

الفصل الأول

تمهيد فى فلسفة العلوم

(١) الصلة بين العلوم والفلسفة .

(٢) حركات النقد الذاتى فى العلوم وفلسفة العلوم.

(٣) المنهج الذى اتبعناه فى عرض فلسفة الرياضة.

(١)

هناك دائما صلة وثيقة بين العلوم والفلسفة، وفى الفكر القديم حينما كانت العلوم أجزاء من الحكمة أو الفلسفة لم تكن الصلة صلة جزء بكل فحسب، وإنما كانت فوق هذا صلة اهتمام من الفلسفة الأولى بتحليل أو تبرير المبادىء والمسلمات التى تقوم عليها العلوم.

وفى الفكر الحديث بعد أن استقلت العلوم شيئا فشيئا عن أمها الفلسفة، ظلت تلك الصلة قائمة ولو من طرف واحد، أعنى من جهة الفلسفة وحدها التى عُنيت فى نطاق اهتماماتها المنطقية بالتعرف إلى مناهج العلوم أو طرائق التفكير التى كفلت للعلوم تقدما مطردا بعيدا عن الفلسفة وطرقها ومنطقها، فنشأ بذلك فى أحضان الفلسفة فرع من الدراسات المنطقية غير مسبوق سمى مناهج العلوم (Meth-odology) وفى الفكر المعاصر تجاوزت الصلة بين العلوم والفلسفة تلك الحدود الضيقة التى عبرت عنها فكرة مناهج العلوم.

فلقد نشأت فى العلوم نفسها- وخاصة المتقدمة منها - حركات نقد ذاتى لبنائها العلمى من داخله، لاختبار الأفكار والمبادىء أو الأسس التى يقوم عليها البناء، وبيان الارتباط بينها وبين قضايا العلم ونظرياته المشتقة منها. فقدمت بذلك العلوم نفسها المشاكل التي تواجهها والموضوعات التى تثيرها، إلى الفلسفة التي وظيفتها الدائمة

أيضا نقد المعرفة المتكونة فى أنساق علمية بتحليل البناء العلمى للوقوف على حقيقة الأسس التى يقوم عليها وطبيعتها وقيمتها . فظهر بذلك مرتبطا بحركات نقدية فى العلم، ما يسمى اليوم «فلسفة العلوم» Philosophy of Sciences التى هى الآن ملتقى الباحثين من المعسكرين العلمى والفلسفى ومجال التعاون المثمر بين العلماء والفلاسفة. وتقهقرت تبعا لذلك عبارة مناهج العلوم، فلم تعد تظهر إلا فى الكتب الطلابية. وربما أصبح استعمالها اليوم بالنسبة إلى العلوم المتقدمة لا مضمون له لأنها توهم بدراسة الطرق التى يمارسها العلماء فعلا فى علومهم المختلفة وهذا بالطبع لا يفيد العلماء أنفسهم شيئا جديدا لم يكونوا على علم به من قبل، كما لا يفيد الفلاسفة من حيث أنهم يرفضون قطعا أن تكون الفلسفة علما على غرار تلك العلوم أو أن تتخذ طرقها. إذ الأمر الهام فى هذه الفلسفة ليس البحث عن منهج علمى يحتذى أو يفرض وإنما تحليل البناء العلمى القائم فعلا إلى عناصره وأسسه ونقد هذه الأسس لنبذ ما لا ضرورة له وتقويم الحقيقة العلمية فى نطاق حقائق المعرفة الإنسانية .

ولا شك أن فلسفة العلوم تتضمن حتما الإشارة إلى المناهج العلمية، ولكن ما تتضمنه بالأصالة هو الإشارة إلى حركات نقدية هامة تميز الفكر المعاصر فى العلوم القائمة فعلا عند العلماء

أنفسهم للأسس والمبادىء التى تقوم عليها علومهم وإعادة النظر فيها من جديد بالتحليل وبالضبط المنطقى فى ضوء حاجات جديدة للعلم ذاته. كما تتضمن بالضرورة فوق هذا الإشارة إلى مضامين فلسفية بحتة سواء عند الفلاسفة أو عند العلماء وذلك عندما ينتهى البحث إلى تحديد طبيعة «الحقيقة» التى يصل إليها العلم وقيمتها وصلتها بغيرها من الحقائق فى نطاق نظرية للمعرفة.

(٢)

وكما قلنا فقد هيأت حركات النقد التى حدثت فى داخل بعض العلوم المتقدمة ومن قبل العلماء أنفسهم (فى الرياضيات والطبيعيات) إلى نشأة فلسفة العلوم اصطلاحا وموضوعا .

ولقد كانت فلسفة التاريخ أسبق فلسفات العلوم ظهورا وانتعاشا منذ أوائل القرن التاسع عشر رغم حداثة دخول علم التاريخ المرحلة العلمية التى نقلته من معرفة أدبية بقصد العظة والاعتبار، إلى علم يدخل الدراسات الجامعية بقصد فهم الأحداث وتفسيرها بأسبابها الحقيقية. فلقد ظهرت فلسفة التاريخ عند **هيجل** Hegel فى ألمانيا كمحاولة لتجاوز أحداث التاريخ الغزيرة المختلطة إلى فهم لمنطق العقل الذى أنتجها وهو منطق الجدل الذى ينتقل من النقيض إلى

نقيضه ثم إلى ما يؤلف بين النقيضين. وتلميذه **ماركس** رغم قبوله لهذا المنطق لم يقبله جدلا بين أفكار مجردة للعقل وإنما بين عوامل اقتصادية بحتة ومن ثم جاء الفهم المادى للتاريخ. أما عند معاصرهما الفرنسى **أوجست كونت** Conte فقد تبلورت نظرته الفلسفية للتاريخ فى علم جديد إذ اقترح أنه يجب أن يوجد علم الاجتماع الذى عليه أن يبدأ بإثبات وقائع خاصة بحياة الإنسان (وهذا هو عمل التاريخ) كما عليه أن يكتشف العلاقات السببية بين تلك الوقائع أى القوانين الاجتماعية (وهذا عمل علم الاجتماع) وبذلك يبدو أن عالم الاجتماع يرفع التاريخ إلى مرتبة علم بأن يفكر علميا فى نفس الوقائع التي يتناولها المؤرخ تجريبيا وذلك بربطها بقوانين .

لكن فلسفة التاريخ فى القرن العشرين ابتعدت كثيرا عن تلك الأنظار الميتافيزيقية البحتة وأصبحت أكثر وعيا بمشاكل علم التاريخ كعلم وأكثر مقدرة على نقده وتحليله عند أمثال **كروتشه** Croce فى إيطاليا **وكول نجوود** Collingwood فى إنجلترا **ودلتاى** Dilthey فى ألمانيا .

أما فلسفة الطبيعيات أو فلسفة العلوم الطبيعية (Philosophy of physical sc. أو philos. of Natural Sciences) فهى آخر فلسفات العلوم ظهورا فى القرن العشرين رغم أن الاصطلاح نفسه يرجع إلى

نيوتن فى القرن الثامن عشر حيث كان عنوانا لكتابه فى الطبيعيات.
وفي الواقع كانت الطبيعيات إلى السنوات الأولى من القرن العشرين واثقة تماما من خطواتها التى قطعتها مدى قرنين وكان يظن أن اكتشافاتها الهامة قد تمت وأن تقدمها المرتقب بعد ذلك إنما كان فى المزيد من الدقة فى قوانينها القائمة، أو على حد تعبير مؤلف أمريكى : «كان فى المزيد من دقتها حتى الكسر العشرى الرابع بدلا من الكسر العشرى الثالث». ولكن فى العشرينيات من هذا القرن ظهرت نظرية النسبية فتعرضت معها الطبيعيات الكلاسيكية إلى هزة عنيفة دخلت بها ومعها مرحلة النقد الذاتى لأسسها ومبادئها وتصوراتها الجوهرية. وبالتالى اتجهت وجهة فلسفية أكثر منها علمية تبرر إسهام الفلسفة فى نفس المسائل التى أثارها الاتجاه الجديد. ذلك لأن المسائل التى أثارها النقد الداخلى للطبيعيات مسائل ذات طبيعة فلسفية عريقة : ما طبيعة الزمان وما طبيعة المكان وما الحركة ؟ كيف يمكن أن تطبق التصورات الهندسية؟ كيف يصح أن يكون الزمان بُعداً رابعا؟ إن عالم الطبيعة الذى يتخذ موقفا نقديا من علمه القائم، ويحلل المبادىء والأسس تحليلا نقديا ليجيب على مثل هذه المسائل الفلسفية، يتوقف بالضرورة عن أن يكون عالما بالطبيعة وحسب إذ يصبح كذلك فيلسوفا يفلسف أو يقوّم علمه، ويسهم معه

الفيلسوف فى مناقشة وتحليل تلك المسائل الفلسفية العريقة فى قدمها عند الفلاسفة .

ولقد انتعشت فلسفة الطبيعيات بعد ذلك إلى درجة أكبر منذ ظهور الطبيعيات الذرية وما أدت إليه من تساؤلات فلسفية وعلمية متشعبة يمس بعضها الأساس الذى يقوم عليه العلم كله وهو هل هناك فى عالم الذرة حتمية مطلقة أم يتسع الأمر إلى قبول نوع من الحرية ؟.

أما الرياضيات فقد سبقت إليها الحركة النقدية منذ أوائل القرن الماضى عند الرياضيين أنفسهم وهى مستمرة حتى اليوم .

حقيقة إنه لا يوجد علم أكثر عراقة فى تاريخه من الرياضة. فقد دخلت الرياضة مرحلة اليقين العلمى منذ أقدم المفكرين الذين حفظ لنا التاريخ أسماءهم : **طاليس وفيثاغورث**. كما أنه لا يوجد علم انحدر إلينا عبر القرون كبناء وثيق شاهد بالعبقرية العلمية للإنسان مثل هندسة الرياضى الإسكندري **أقليدس**. ولكن بعد ثلاثة وعشرين قرنا من الثبات والتقدم ظهر **هندسيّون** من أمثال **ريمان** (Reimann) و **لوبتشفسكى** (Lobachevaski) فى القرن الماضى وغيرهما من الرياضيين الذين كانوا ينقبون فى أسس علمهم وقواعده التى يقوم عليها فشعرت بفضلهم الرياضيات فجأة بحاجتها إلى نقد ذاتى

لتقصى أسسها وأصولها التى تقوم عليها طوال القرون عندما تبين هؤلاء الرياضيون إمكان هندسات أخرى عديدة كل واحدة منها متسقة القضايا أو النظريات ومخالفة لغيرها. كما تختلف جميعا عن الهندسة الموروثة عن أقليدس، وبدا فوق هذا أن بعض تلك الهندسات الجديدة أكثر قربا من الواقع الكروى لكوكبنا من الهندسة التقليدية، وأن الكثير منها واسع التطبيق أيضا. كل هذا إنما تبين بتحليل البناء الهندسى التقليدى للوصول إلى أسسه ومسلماته ثم بتغيير الأسس والمسلمات تغييرا يؤدى إلى قيام هندسات أخرى مغايرة. كما تبين كذلك أنه لكى يقوم علم هندسى وثيق؛ يجب الابتعاد بالمسلمات عن كل الأشكال المكانية والاكتفاء بإحالتها إلى المنطق الصورى وحده حتي لم تعد الهندسة نظرا فى أشكال هندسية وإنما فقط فى علاقات منطقية بحتة. كل هذا النقد الباطنى القائم على تحليل البناء الرياضى بما فيه المسلمات إنما عرف عند الرياضيين بمسألة «أسس الرياضة» (Foundation of Mathematics) بينما تسمى المسألة نفسها عند الفلاسفة والكثيرين من الرياضيين أيضا «فلسفة الرياضة» (Philosophy of Mathem.) لأنه واضح الآن أن أولئك الرياضيين الباحثين فى الأسس والأصول إنما يفلسفون وأنهم بالتجائهم فوق هذا إلى المنطق الصورى الذى هو لباب الفلسفة

وجوهرها إنما التقوا مع الفلاسفة المهتمين بنقد المعرفة العلمية عن طريق تحليل البناء العلمى إلى عناصره وأسسه لتحديد طبيعة تلك الأسس وما يترتب عليها من قضايا ونظريات مشتقة منها على أساس المنطق وحده وحسب فتساءل حينئذ الفلاسفة : أهى كلها قضايا من طبيعة المنطق الصورى أم أنها لا تمت إلى هذا المنطق بصلة وإنما تستقى من منابع تجريبية تعرف عند الرياضيين باسم «الحدس»؟ .

ثم ما معنى «الحقيقة» فى الرياضة وما قيمة الحقائق الرياضية؟ هكذا نجد أن فلسفة الرياضة اليوم ملتقي أبحاث الرياضيين والفلاسفة معا وأكبر مظهر من مظاهر التعاون المثمر بين العلم والفلسفة .

ولقد انعقد أول مؤتمر دولى لفلسفة العلوم وتحت هذا الاسم فى باريس سنة ١٩٣٥ وتعاقبت بعده مؤتمرات أخرى . كذلك ظهرت فى برامج الجامعات دراسات تحت هذا الاسم. كما ظهرت مجلات عديدة تحمله[١] وفى كل الأحوال ينصب البحث فيها على الرياضيات والطبيعيات بصفة خاصة وإن كان يصح أن يمتد ليشمل علوم الأحياء والتاريخ والعلوم الإنسانية الأخرى.

أما المسائل التى تعالج فى فلسفة العلوم فأمر مختلف فيه أشد

الاختلاف، ولقد ذكرنا أمثلة سريعة لمضمون هذه الفلسفة فى التاريخ والطبيعيات والرياضيات. ولكن يمكن الإشارة إلى ما يأتى من الموضوعات :

أولا : موضوعات ذات طابع منطقى صرف. وهي إما موضوعات من المنطق الرمزى نفسه أو أبحاث فى التعريفات والقضايا الخاصة بعلم ما مع تحليلها تحليلا رمزيا (أى بواسطة رموز المنطق الرياضى) بقصد اشتقاق الحدود المعرفة بعضها من بعض وبرهان القضايا أو النظريات على أساس المسلمات .

ثانيا : موضوعات ذات طابع فنى علمى، وهى بالنسبة إلى الرياضة كالبحث فى أسس (Foundation) البناء الرياضى كله أو أسس أية نظرية رياضية منفردة لاستقصاء الأصول والمسلمات، أو كالبحث فى معالجة نقائض الرياضة. أما بالنسبة إلى الطبيعيات فكالبحث فى الأفكار الأساسية التى تستند إليها، مثل أفكار الزمان والمكان والحركة والضوء والسرعة والذرة وبالجملة كل الثوابت فى الطبيعيات الرياضية .

ثالثا : موضوعات ذات طابع منهجى (أى خاص بمناهج كل علم على حدة) ففيما يختص بالرياضيات يتناول البحث كيفية إقامة ما يسمى النسق الاستنباطى Deductive System كما يتناول بحث

الشروط المنطقية لاختيار المسلمات،وفيما يختص بالطبيعيات يتناول البحث مشكلة الاستقراء من جوانبها المختلفة .

رابعا : موضوعات ذات طابع فلسفي ومثالها المواقف الفلسفية الأساسية التي يقفها الباحث حيال حقائق علم ما من العلوم. ففيما يختص بالرياضة مثلا نجد في الوقت الراهن ثلاثة مواقف أساسية تتنازع الأمر فوق مسرح الأبحاث الخاصة بأسس الرياضة وهي : موقف المناطقة الذين يرون في قضايا الرياضة مجرد قضايا من المنطق الصوري وحسب، ثم موقف الأكسيوماتيكيين الذين يرون أن المنطق والرياضة نابعان سويا من أصل آخر قبلهما هو الطريقة الأكسيوماتيكية، ثم أخيرا موقف الحدسيين الذين يرفضون الموقفين السابقين ويؤكدون أن الحقائق الرياضية لا صلة لها بالمنطق وأنها نابعة من نوع خاص من التجربة الفكرية يسمى «الحدس الرياضي». أما فيما يختص بالطبيعيات فيدور البحث حول تحديد أفكار كالعلية والحتمية والفرض والقانون والاحتمال وما قارب هذه المسائل التي تلتقي كلها في تقويم للقوانين العلمية وهل هي حقائق ضرورية أم اتفاقات عابرة من صنع العلماء أم غير ذلك من المواقف الفلسفية المعروفة حيال فكرة «الحقيقة».

(٣)

نريد الآن أن نحصر جوامع الكلم فى فلسفة الرياضة كما سنقدمها فى الفصول القادمة .

ونحن لكى نستعرض موضوعا معقدا كهذا له جوانبه الفنية البحتة لا نريد أن نختط فيه غير خطة تاريخه هو نفسه وحسب. فأوضح الطرق إليه وأيسرها الالتزام بالمنهج التاريخى فى تعقب ظهور المسائل وتطورها وحلولها واتجاهاتها عبر التاريخ الطويل للرياضة والفلسفة معا. إلا أن منهجنا التاريخى هو مع ذلك نقدى تحليلى فى آن واحد. بمعنى أننا نتوقف أمام كل مسألة تظهر فى التاريخ المشترك بين هذين العلمين. لنتفهم مغزاها ودورها الذى تؤديه فوق مسرح فلسفة الرياضة بحيث يبدو فى حقيقة الأمر أن البحث ليس تاريخيا وحسب، وإنما هو أيضا نقد وتحليل للمواقف الفكرية الأساسية مع تقويم للدور الذى يؤديه كل موقف منها، ومن ثم قسمنا خطواتنا فى البحث إلى المراحل الأربعة الآتية :

فى **المرحلة الأولى** نبدأ من تعريف تقليدى للرياضة بموضوعاتها (انظر الفقرة ٤) ونحاول أن نتتبع الأصول التي نشأت عنها تلك الموضوعات فنرفض الحلول المثالية والحسية والاجتماعية لفكرتى المكان والعدد(الفقرة ٥) ونبين أنه لابد لنشأة موضوعات الرياضة من

حضارة العلم والعقلية العلمية مما توافر فى بلاد اليونان القديمة لأول مرة فى التاريخ، وهكذا نشأت الرياضيات منذ **فيثاغورث** وإليه ينتسب الرياضيون القدماء الذين اهتموا ببرهان النظريات متفرقة دون محاولة تنسيقها جميعا فى نسق علمي موحد (الفقرة ٦) أما تنسيقها فى علم موحد فيرجع الفضل فيه إلي رياضى من العصر الإسكندري هو **أقليدس** الذى أفاد من تحليلات **أرسطو** الرائعة للأسس التى تستمد منها الهندسة براهينها وهى التعريفات والأصول والمسلمات. فكان هذا التحليل الأرسطى حجر الزاوية فى البناء الرياضى الكبير الذى أقامه **أقليدس** طبقا لذلك التحليل. كما كانت المسائل التى أثارها المنهج المشترك بين **أرسطو وأقليدس** هى عين المسائل التي سيثيرها المحدثون بشأن الرياضة وأسسها (فقرة ٩).

وفى **مرحلة ثانية** نبدأ من تقسيم للرياضة إلى هندسة وتحليل ونتناول الهندسة فى العصر الحديث على انفراد ونبين كيف أن محاولات الرياضيين الفاشلة، برهانَ المسلمة الخامسة عند **أقليدس** بالإضافة إلى محاولات قبول مسلمات بديلة لها تناقضها، أسرع بظهور هندسات لا حصر لها فى القرن التاسع عشر، كما أسرع بحركة النقد الذاتى فى الوقف عينه وعند الرياضيين أنفسهم لعلمهم ولأسسه ومسلماته (فقرة ١٠) مما أدى بهم فى آخر المطاف إلى

تصور جديد «للحقيقة» الرياضية التى لم تعد عندهم مطابقة المسلمات للواقع وإنما فقط عدم تناقض مسلمات كل هندسة على حدة فيما بينها بغض النظر عن الواقع أو المكان لأنه لا واحدة من الهندسات أولى من غيرها بادعاء المطابقة (فقرة ١١) كما أدى بهم أيضا إلى تقصى مسلمات كل هندسة على حدة وحصر النظريات المترتبة عليها، وإلى الاقتصاد فى عدد المسلمات وتخفيضها إلى أدنى حد ممكن وهذا كله مما عرف آنذاك بمباحث تأسيس الهندسة أو «الأكسيوماتيك» وهى الحركة التى أسفرت آخر الأمر عن تجريد المسلمات عن كل المعانى الهندسية الدالة على أشكال وإحالتها تماما إلي تصورات من المنطق الصورى وحده. وعند هذا الحد أصبح لزاما على المنطق الصورى أن يتطور أيضا إلى علم رياضى (فقرة ١٢) كما أن اختيار طائفة من المسلمات لإقامة هندسة ما اتضح أنه يجب أن يخضع إلى شروط منطقية معينة إذا لم تراع تلك الشروط تناقضت المسلمات أو أدت إلى نظرية أخرى (فقرة ١٤).

وفى **مرحلة ثالثة** من البحث نتناول الجبر والتحليل ونتصدى لحركة النقد الذاتى فى التحليل التى انطلقت من اكتشاف دوال رياضية منفصلة أى لا تشهد «بالاتصال» أو الاستمرار وكان يظن أن الدوال كلها متصلة أى تجتاز قيما عددية متتابعة لا فجوات فيها

وبذلك تعبر خطا هندسيا متصلا. فظهرت منذ ذلك الوقت فى منتصف القرن الماضى حاجة ملحة عند الرياضيين إلى التخلي عن الحدس الهندسى برمته الذى يمثله فى التحليل ذلك الاتصال (فقرة ١٦) فنبذ الرياضيون فكرة الاتصال كأساس للتحليل واتجهوا إلى الأعداد الحسابية المعروفة يلتمسون فيها أساسا وثيقا لعلم التحليل وأصبح هذا الاتجاه محتوما منذ اكتشاف الأعداد التخيلية (فقرة ١٧) وهكذا بدأ الرياضيون يردون الرياضة كلها إلى الحساب الأولى المعروف وأصبح العدد الصحيح، المقياس الوحيد لليقين الرياضى. وهذا ما عرف فى تاريخ الرياضة فى القرن الماضى بحركة «تحسيب» (إن أمكن التعبير) الرياضة أو «بالمذهب الحسابى» فردوا الأعداد التخيلية إلى العدد الصحيح (فقرة ١٨) كما ردوا إليه أنواع الأعداد جميعا ومن أهمها الأعداد الصماء التي احتاجت إلى إحدى نظريتين : الحد أو القطع، لكى ترد إلى الأعداد الصحيحة وربطوا الهندسة بواسطة الأعداد الصماء التي تشهد بالاتصال (أو بعملية متصلة) إلى الأعداد الصحيحة. فأصبحت الرياضة كلها قائمة على الأعداد الصحيحة وعملياتها واكتسبت الرياضة منها يقينها كذلك. وهكذا أضفى المذهب الحسابى على الرياضيات وحدة وتماسكا، ويقينا مستمدا من يقين الأعداد (فقرة ١٩) ثم ظهرت فى نفس الوقت

الذى نضج فيه المذهب الحسابى فى الربع الأخير من القرن الماضى نظرية المجاميع للرياضى **جورج كانتور** الذى اقتحم بها أمنع الحصون على الفكر البشرى وأقدمها وهو حصن الأعداد اللامتناهية فوسع من أفق الحساب وأمده بعالم من أبدع ما اكتشف الإنسان. وفي هذا كله دعم للمذهب الحسابى من خارجه، وتأكيد بأن الأعداد كلها، المنتهى منها واللامنتهى، أساس كل شىء فى الرياضة (الفقرة٢٠).

وإذا كانت الكلمة الأخيرة فى المذهب الحسابى هى أن الأعداد الصحيحة هى كل شىء فى الرياضة فإن الرياضيين الباحثين فى أسس علمهم بعد ذلك لم يقنعوا بمثل تلك النتيجة ورأوا أنه لكى تكتسب نظرية الأعداد نفسها كل ما هى جديرة به من يقين لابد من العودة إلى المنهج الرياضى التقليدى وهو إقامة الأعداد نفسها على «مسلمات» تنتجها ومن ثم محاولات كثيرة فى أكسيوماتيك العدد. وقد استدعت هذه المحاولات تحليلا منطقيا جديدا للأعداد نفسها لكى ترد إلى ثوابت المنطق الصورى ، كما احتاج المنطق الصورى نفسه إلى دفعة حاسمة جعلته علما رياضيا بحتا بحيث ينهض بتبعاته الجديدة من جهة استنباط الأعداد منه، وكذلك للمساهمة فى حل نقائض الرياضيات المعاصرة (فقرة ٢١).

بقيت **المرحلة الرابعة والأخيرة** التي نستعرض فيها المذاهب المعاصرة فى فلسفة الرياضة مجردة عن كل جوانبها الفنية البحتة التى لا تهم إلا الرياضيين وحدهم. ونتوقف طويلا عند المذهب الأول منها وهو المذهب اللوجستيقى، وهو موقف أولئك الفلاسفة الذين رأوا إمكان قيام فلسفة علمية، أى تتخذ منهج العلم. وموضوعها متابعة تحليل الرياضة إلى أبعد مما وصلت إليه فى المذهب الحسابى أو فى حركة أكسيوماتيك العدد. فكان منهج هذه الفلسفة العلمية هو المنطق فى أقوى وأحدث صوره الرياضية وهو ما يسمى اللوجستيقا، أما موضوعها فهو اشتقاق العدد من ثوابت المنطق الجديد ومن وراء العدد اشتقاق كل نظريات الرياضة كما رتبها المذهب الحسابى (فقرة ٢٢). ولابد أن نستعرض أول فروع الحساب فى هذا المنطق وهو حساب القضايا الأولية لكى نلمس عن قرب طبيعة هذه الآلة الفنية الجديدة التي تستعملها الفلسفة العلمية فى معالجة مشكلات العلم الرياضى (فقرة ٢٤) ونتبين أيضا الأسس المنطقية البحتة لذلك البناء اللوجستيقى الذى يجمع المنطق والرياضة معا فى نسق موحد نتدرج فيه من المنطق إلى الرياضة بحيث تبدو الرياضة مشتقة من المنطق عن طريق العدد الذى انتهى إليه المذهب الحسابى (فقرة ٢٥). ثم نعالج بعد ذلك المذهب الأكسيوماتيكى وهو الذى يرفض

اشتقاق الرياضة من المنطق ويقرر أن الرياضة والمنطق ينبعان متوازيين معا من شيء قبلهما هو الطريقة الأكسيوماتيكية (فقرة ٢٦). ثم نختتم باستعراض المذهب الحدسي الجديد الذى يرفض المذهبين السابقين ويعود إلى فكرة الحدس أو تلك التجربة الفكرية المباشرة التى يألفها الرياضيون كمنبع أصيل ووحيد للرياضة (فقرة ٢٧). ولا سبيل إلى التوفيق بين هذه المذاهب المتصارعة الآن فوق مسرح الأبحاث الخاصة بأسس الرياضة لأنه على حد تعبير للرياضى **هنرى بوانكاريه**، لا سبيل إلى التوفيق بين المنطقيين والتجريبين، بين ذوى العقلية الكانتورية (نسبة إلى **جورج كانتور**) التى تقبل أعدادا لا متناهية وذوى العقلية غير الكانتورية التى لا تقبل إلا الأعداد المنتهية، بين من سماهم **وليم جيمس** ذوى العقول الرقيقة وذوى العقول الخشنة.

الهوامش

١-المجلات الآتية : (بلتمور بأمريكا) Philosophy of Science - (جوتنبرج بألمانيا)Theoria

(أكسفورد بإنجلترا) Analysis - (ليبسج بألمانيا) Erkenntnis .

الفصل الثانى

موضوعات الرياضة ونشأتها عند الإنسان وتاريخها قديما

(٤) التعريف التقليدى للرياضة بموضوعاتها .

(٥) الأصول الفزيولوجية والاجتماعية لفكرتى المكان والعدد ، أو للهندسة والحساب .

(٦) نشأة الرياضيات كعلم عند اليونانيين .

(٤)

تبدو الرياضيات الآن عند النظرة الأولى أنها تختلف تماما عن غيرها من العلوم كالطبيعيات وعلوم الأحياء مثلا .

فهذه الأخيرة تستند إلى مشاهدات حسية وتجارب. وتحتاج إلى معامل علمية وآلات متفاوتة تعقيدا لكي تتكون وتنمو.

في حين أن الرياضيات تستعيض عن ذلك كله بالسبورة أو الطباشير أو بالورق والقلم وحسب. كما لو كانت تنبع كلها من رأس الرياضي. وهذا ما عبرت عنه لوحة من القرن السابع عشر محفوظة بمتحف اللوفر صور فيها **فرديناند بول** (Boll) الرياضيَّ رجلاً ينظر إلى سبورة عليها أشكال وأعداد. كما عبرت عنه أيضا فلسفات كبرى منذ القدم فقد ذهب **أفلاطون** إلى أن موضوعات الرياضة أو على الأصح ماهيَّات الأشكال والأعداد ليست من عالم الحس المتغير وإنما هي مُثُل قائمة بذواتها وثابتة، يتأملها الرياضي ويصدر عنها في علمه، وفي محاورته المسماة باسم فتى من أثرياء أثينا هو «مينون» نجد أن خادمه الذي لم يتلق علما استطاع - بعد أن حاوره **سقراط** لتوليد الحقيقة أو المعرفة من ذهنه - أن يبرهن دون مشقة نظرية معقدة في الهندسة، لأن تلك المحاورة أثارت في ذهنه ذكرياتٍ قديمة لمشاهدته السابقة في عالم علوي لتلك المثل الرياضة القائمة بذواتها أبدا.

وفى الواقع إن موضوعات الرياضة فى صورتها التى يألفها الرياضيون اليوم تبدو مجردة عن كل ما هو حسى وكأنها تنبع من الفكر وحده. فهى موضوعات لا تشير إلى الأشياء حتي تحتاج مقدما فى تكوينها وأطراد نموها إلى تجربة سابقة وإلى معرفة بها. وإنما هى تشير فحسب إلى الجانب الذى «يقاس» و«يعد» منها. أعنى أنها تتناول جانب الزيادة والنقصان والمساواة فى الأشياء وهذا هو «القياس» كما تتناول جانب «الترتيب» أو «النظام» فى تتابع الأشياء وتسلسلها وهذا هو «العدد».

ومن ثم كان الموضوع الذى تنظر فيه الرياضة كما تراه الفلسفات موضوعا مزدوجا :

القياس والترتيب (Mesure & Ordre) كما يقول **ديكارت**

أو الكم والمقدار، أو الكم المتصل والكم المنفصل كما تقول اصطلاحات أكثر قدما عند فلاسفة كثيرين، ترجع فى أصولها إلى أرسطو، ذلك هو الموضوع المزدوج للرياضة وبه تعرّف عند الفلاسفة دائما .

نلاحظ الآن فى هذا الموضوع المزدوج أنهم يضعون فى الطرف الأول من كل ثنائية من تلك الثنائيات موضوع الهندسة، وفى الطرف الثانى موضوع الحساب. يقول مثلا **ابن سينا** (فى النجاه ص ٣٣٨)

«والكم ينقسم إلى المتصل.. وإلى المنفصل.. ومن حيز الكم المتصل تبتدىء الهندسة ويتشعب دونه التنجيم والمساحة والأثقال والحيل. ومن حيز المنفصل يبتدىء الحساب ثم يتشعب دونه الموسيقى وعلم الزيجات. ولا نظر لهذه العلوم الرياضية فى ذوات شىء من الجواهر ولا فى هذه الكميات من حيث هى فى الجواهر». وهو يعنى بالفقرة الأخيرة أن الرياضيات لا تتناول الكم متصلا أو منفصلا من حيث هو متحقق فى الأجسام وإنما من حيث أن الكم مجرد وخالص فى نفسه عن كل جوهر يحل فيه .

(٥)

وواضح أن الكم والعدد كما يتناولهما العلم الرياضى أكثر الأمور العلمية تجريداً وبُعداً عن الأشياء الحسية التى يعالجها علماء الطبيعة والأحياء بحيث يسهل على المتأمل فيهما، أو بالأحرى فى أصولهما ومنابعهما، أن يذهب مذهبا مثاليا كمذهب أفلاطون فى القديم كما رأينا أو كمذهب الرياضيين المحدثين **هرميت** (Hermite) **وكرونكر** (Kronecker) .

ولكن مثل هذا المذهب فى الأصول المثالية أو المنابع العقلية الصرفة للموضوعات الرياضية لم يكن مقبولا دائما عند المفكرين

المهتمين بأصول هذه الموضوعات وخاصة بعد أن عرف الكثير عن فزيولوجية الحواس كمنبع بعيد ومحتمل لهذه الموضوعات. وبعد أن جمع علماء الاجتماع وقائع كثيرة عن فكرتى المكان والزمان اللتين يُرد إليهما أحيانا الكم والعدد على الترتيب فى بعض الفلسفات. وذلك عندما تقصوا أصولهما البعيدة عند الشعوب القديمة وعند البدائيين. وأخيرا بعد أن عرفنا كذلك الكثير عن تاريخ الرياضة وتطور موضوعاتها طوال تاريخها .

فكل هذه الدراسات الحديثة تضافرت فى إلقاء أضواء متتامة على أصول متواضعة وتجريبية لأفكار مثل المكان والزمان والكم والعدد وغيرها. وهذا لمّا يبطل كل نظرة مثالية فى أصول الرياضة ومنابعها .

فلقد بين **إرنست ماخ** (Ernst Mach) فى كتابه المعرفة والخطأ لأول مرة أن تلك الأفكار وليدة التكوين الفزيولوجى للحواس الإنسانية. فهناك أنواع - كما يقول - من الكم تختلف باختلاف الحواس كالكم البصرى والكم اللمسى والكم الضغطى والكم السمعى وغير ذلك .

ويؤيد هذا الرأى أن فزيولوجية الحواس كشفت منذ أواخر القرن الماضى عن مثل تلك الحقائق وخاصة فيما يخص أصل فكرة المكان

وذلك فى التجارب المعروفة عند **فيبر** (Weber) باسم ظاهرة تعين المكان أو الموضع (Localisation) فوق سطح الجلد. فنحن نعلم الآن من تلك التجارب أن تطبيق طرفىْ برْجل **فيبر** فوق أية رقعة من سطح الجلد لا يحس باختلافهما كنقطتين متمايزتين إلا إذا انفرجت زاوية البرجل انفراجا كافيا بحيث إذا نقصت تلك الزاوية لم تتمايز النقطتان وبالتالى لم تدرك المسافة بينهما أي «المكان»، كما نعلم كذلك أن لذلك الانفراج حداً أدنى يختلف كثيرا باختلاف مناطق الجلد فهو صغير جدا فوق أطراف الأنامل كبير نسبيا فوق الكتفين والفخذين مثلا. ثم نعلم فوق هذا أن ذلك الإحساس بالمسافة (أو المكان أو الكم وكلها هنا مترادفة) إنما هو نتيجة لانتشار جسيمات أو نهايات عصبية معينة -تعرفها فزيولوجيا الحواس- انتشارا متفاوتا فوق سطح الجلد فهى كثيفة فى أطراف الأنامل قليلة فى الظهر. وهذا كله يؤيد الرأى القائل بالأصول الفزيولوجية الممكنة لموضوعات الرياضة ضد المثاليين .

لكن فى الحقيقة مهما تكن أهمية تلك الأصول الفزيولوجية الممكنة فإنها لا تعدو أن تكون مجرد أصول ذاتية وفردية لا تكوّن علما مشتركا بين الجميع. ولذلك فإن علم الاجتماع يحاول أن يفسر هذا الاشتراك بين الناس فيذهب إلى أصول اجتماعية للأفكار الرياضية.

فعلماء الاجتماع الذين تقصوا الشعوب البدائية يقولون إن اتفاق قبيلة ما فى تصور مكان خاص بها ويعم أفرادها إنما له أسباب وأصول اجتماعية بحتة تلخصها عبارة «حاجات الحياة فى الجماعة» فتلك الحياة تفرض على أفراد القبيلة الانتقال للصيد وإلى مكان التوتم لأداء الشعائر الدينية، وتفرض تقسيم الأرض وتعيين الجهات واتخاذ نقط ارتكاز (علامات) فوق التربة للانتقال. ومن ثم كان المكان القبلى مكان الأعمال اليومية التى يحتاج إليها البدائى .

وفى حدود تلك الأعمال المعبرة عن حاجات البدائى فى مجتمعه يمكننا أن نتكلم عن التصور البدائى للمكان أو الكم ذلك التصور الذى يخلو تماما من كل صفة نظرية ومجردة مما يمتاز به المكان العلمى، فهو مكان ممتلىء بالأعمال والحركات التى تجرى فيه وبالعناصر المشخصة للحياة اليومية. فالبدائى يعرف كل أجزاء مكانه اليومي معرفة حركية وعملية، ولكن ينقصه للدهشة الشديدة التصور المجرد أو الإدراك العقلى الخالص عن الحركة والعمل لفكرة المكان. بحيث لو سألت بدائيا عما هو المكان مجردا عن الأعمال والحركات، أى عن المكان الذى يستعمله الرياضيون والهندسيون مثلا فإننا لا نجد عندهم للدهشة الشديدة المقدرة حتى على مجرد فهم السؤال. هذا ما يقوله علماء الاجتماع من أمثال **دوركيم** Durkheim و**موس** Mauss .

فلا بد إذن من فكر آخر غير الفكر البدائى ولابد من حضارة أعلى من المجتمع البدائى كحضارة العلم لكى نصل إلى فكرة المكان ذى الأبعاد الثلاثة الخالية من الأعمال والحركات والأجسام، التى هى موضوع الهندسة. ذلك لأن المكان الرياضى يمتاز بصفات هامة لا تقوى عليها العقلية البدائية فضلا عن استحالة استمدادها من فزيولوجية الحواس. فهذا المكان هو مكان مستمر متصل (Continu) نستطيع أن ننتقل فيه كيف شئنا دون فجوات فيه، ثم إن أجزاءه متشابهة أو متجانسة (Homegene) ولا كيف محدد لها (Isomos-phe) كما إنه لا ينتهى (Infini) بعبارة أخري لا تكفى الأصول الاجتماعية لإقامة المكان الذى يحتاج إليه علم الرياضة .

من جهة أخرى نستطيع أن نتتبع نفس الخطوات السابقة فى نشأة فكرتى الزمان والعدد. هما فكرتان متصلتان إحداهما بالأخرى من حيث أن تتابع الأعداد ربما لم يكن يمكن تمييزه إلا نتيجة لتتابع آنات الزمن فيرجع العدد بذلك إلى الزمن .

أما الزمن نفسه فنستطيع أن نتتبع أصوله فى الحياة النفسية وتتابع أحوالها عند الفرد وهذا هو الأصل التجريبى البحت لفكرة الزمان. ولكن هذا القول لا يكفى فى إقامة علم على الزمان، لأنه زمان فردى بحت. وهو لكى يكون عامًا، يزعم الاجتماعيون أنه يكفى أن

نتتبع أصوله الاجتماعية. وفى الواقع نجد أن البدائيين يقسمون زمنهم أو أوقاتهم إلى زمان طقوس وشعائر، وإلى زمان عمل وصيد كما نجد تقسيما آخر حسب معتقداتهم إلى زمان نحس فلا يعملون فيه شيئا وإلى زمان حظ. فهنا زمان مشبع بالحياة البدائية ولا يستطيع أن يؤدى إلى علم رياضى إذ تحتاج الرياضة إلى حضارة فكرية أعلى هى حضارة العلم التى نستطيع فيها أن نجرد الزمان من كل هذه التقسيمات البدائية العملية ونرقى إلى زمان يمتاز كالمكان بصفات الاتصال والتجانس والخلو من الأشياء واللانهاية .

وربما كانت فكرة العدد قريبة فى منابعها من فكرة الزمان فترجع مثلها إلى تتابع الحالات النفسية عند الفرد. ولكن مهما تكن أصولها التجريبية هذه، فهى لا تفسر لنا العدد فى تجرده وعمومه كما هو فى الرياضة. ولقد وجد الاجتماعيون فكرة العدد فى الشعوب البدائية فى صورة يختلط فيها العدد بالمعدود إلى حد يدهش المتحضر، فإن البدائى يستطيع من مجرد منظر شىء ما أن يحدد عدده بينما يحتاج هذا من المتحضر إلى مقابلة أجزاء ذلك الشىء واحدا واحدا بسلسلة الأعداد. كما وجدوا أن بعض الشعوب البدائية لا يعرف من سلسلة الأعداد. غير الأعداد الثلاثة الأولى وبعد ذلك يطلقون «كثير» للدلالة العددية. وهناك شعوب بدائية تطلق أسماء مختلفة على عدد

واحد بعينه تبعا لاختلاف المعدودات. وهناك شعوب اتخذت العدد خمسة أو العدد عشرين أو حتى العدد ستين بدلا من العدد عشرة كأساس للحساب العددى. كل هذا يشهد بأن فكرة العدد التى هى أكثر عمقا من فكرتى المكان والزمان احتاجت إلى تجريد عقلى وإلى حضارة علمية أعلى من حضارة البدائى .

وفى ضوء هذا كله يتبين لنا أننا إذا رفضنا المذهب المثالى فى أصول الرياضة فإن المذهبين : الفزيولوجى والاجتماعى مهما ألقيا من ضوء على أصول متواضعة لموضوعات الرياضة إلا أنهما لا يكفيان إطلاقا فى فهم حضارة العلم .

ولذلك ننتقل الآن إلى إلقاء نظرة فى أصول الرياضيات من تاريخ نشأتها عند القدماء .

(٦)

إن أقدم وثيقة عن الهندسة هى البردية المصرية المسماة باسم مكتشفها الألمانى **رند** (Rhind) وهى عبارة عن مخطوطة كاتب الملك أحمس التى ترجع إلى ٣٥٠٠ سنة، وتشتمل على وصفات عملية مختلفة فى الرياضة لحل المشاكل اليومية لدى المصرى القديم. وحاجة المصرى القديم إلى إعادة مساحة أرضه عقب كل فيضان

كما يلاحظ **هيرودوت**، وإلى التعمير والبناء.هى نقطة البدء فى نشأة علم المساحة الذى هو علم الهندسة فى مرحلته التجريبية والممهد لها. من تلك الوصفات العملية التى لا نعلم بعد طريقة حسابها، تقدير قدماء المصريين لمحيط الدائرة بستة عشر تسعا من قطرها وهو تقدير تقريبى طبعا. ومن تلك الوصفات أنهم توصلوا بالتقريب أيضا إلى مساحة المثلث المتساوى الساقين والذى أضلاعه **أ**، **أ**، **ب** وذلك بضرب (**أ × ب**) مقسوما على اثنين مما يؤدى إلى نتيجة تقرب إلى الحقيقة كلما كان **أ** أكبر من **ب**. كما عرفوا عمليا كذلك أن المربع المقام على الوتر فى مثلث قائم الزاوية يساوى مجموع المربعين المقامين على الضلعين الآخرين وذلك فى حالة واحدة فقط هى حين تكون أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية على التوالى ثلاث وحدات وأربع وخمس. أعنى أنهم عرفوا عمليا النظرية التي ستنسب فيما بعد إلى اليونانى **فيثاغور** ولكن فى حالة واحدة بالذات هى الموصوفة آنفا ولم يستطيعوا الارتفاع عنها إلي النظرية فى عمومها.

كذلك لم يستطع قدماء الهنود أن يرتفعوا إلى النظرية فى عمومها إذ عرفوها عمليا محصورة فى حالة واحدة هى حين تكون أطوال أضلاع المثلث خمس وحدات واثنتى عشرة وثلاث عشرة على التوالى.

وهكذا أدت الحاجات العملية كمساحة الأرض مثلا بقدماء

المصريين وغيرهم كالهنود إلى السير فى الطريق المؤدى إلى اكتشاف علم الهندسة عن طريق علم المساحة ولكن دون اكتشاف الهندسة ذاتها كعلم نظرى له قضاياه ونظرياته العامة التى برهن على صدقها وعمومها فى كل خطوة من خطواته.

أما الاكتشاف الحقيقى لعلمى الهندسة والحساب بنظرياتهما وقواعدهما مع البرهان النظرى على صدقها صدقا يعم كل الحالات الجزئية فمن أسرار الحضارة اليونانية .

إن **إرنست رينان** E.Renan وهو من أئمة مفكرى القرن الماضى، فى كتابه الطيب عن «مستقبل العلم» الذى يستفاد به فى فهم الروح العلمية برغم نظرته الضيقة إلى العلم من خلال علم إنسانى كالفيلولوجيا (فقة اللغة) بدلا من خلال علوم الطبيعة التي يمكن أن يكون لها مستقبل واضح، إن **إرنست رينان** هذا لم يجد تفسيرا يبرر به ظهور العلم عند اليونايين لأول مرة فى تاريخ الإنسانية كقضايا عامة يبرهن على صدقها إلا القول بأن ذلك هو «المعجزة اليونانية» . وهو يعنى أن المعجزات إذا كانت من نوع دينى فمعجزة اليونايين تأسيس العلم. ولقد أصبحت عبارة **رينان** هذه شائعة الآن بين المؤلفين الغربيين الذين يشاطرونه الرأى بأن العلم عند اليونان غير مسبوق فى تاريخ غيرهم .

الواقع إن السر فى قيام تلك المعجزة هو إدراك اليونانيين دون غيرهم من الشعوب القديمة لفكرة العلم كحجة أو برهان على صدق قضية ما صدقا عاما أى فى كل التطبيقات الجزئية التى تصادفها، وذلك بدلا من الاكتفاء بوصفات عملية وقواعد تقريبية غير أكيدة كما فعل قدماء المصريين. لقد كان اليونانيون ككل شعوب حوض البحر الأبيض المتوسط شعبا يحب الجدل والمناظرة. ولكنهم امتازوا ببيئة سياسية لم تتح لغيرهم، فيها تنافس شديد بين المدن التى تريد كل واحدة منها السيطرة على غيرها وعلى البحار والتجارة، كما فيها أيضا حرية فكرية تسمح بتنافس حر طليق بين أفراد المدينة للسيطرة على مصائرها. وهذا كله مما جعلهم ينمون ملكة النظر العقلى وفنون البلاغة والخطابة والدراما والفلسفة والسفسطة وغيرها من وسائل التأثير على الجماهير، فأدى بهم كل ذلك إلى التنبه إلى فن الجدل والمناظرة والمنطق، وبالتالي إلى اكتشاف فكرة العلم ذاتها كحجة أو برهان. هكذا ظهرت فروع المعرفة المختلفة عندهم وعلى رأسها الرياضيات التى تبرز فيها العقلية النظرية البرهانية إلى أبعد حد. وذلك منذ أقدم مفكريهم الذين حفظ لنا التاريخ ذكرهم أمثال **طاليس وفيثاغور**. والأول منهما هو الذى حسب ارتفاع الهرم الأكبر بقياس ظله عندما يكون ظل كل شيء مثله. أما الثانى فهو معلم الإنسانية

كلها فكرة العلم بإنشائه الرياضيات وإلى مدرسته ينتسب رياضيّو اليونان .

إن التفكير الرياضى الذى بدأ بفيثاغور فى القرن السادس قبل الميلاد تميز بظاهرتين: أولاهما أنه امتزج دائما بنظرات ميتافيزيقية زائدة على حاجات الرياضة نفسها وهكذا ذهب **فيثاغور** (أو تلميذه **فيلالاوس**) - كما يروى أفلاطون وأرسطو - إلى أن كل شىء فى الوجود هو شكل هندسى وعدد، ويشف هذا التصور الميتافيزيقى الرياضى للوجود عما وصل إليه الذهن اليونانى منذ بداياته من مراحل التجريد العقلى أو العلمى الذى أفرغ العالم من كل مادته الظاهرة مستبقيا أشكالا هندسية وأعدادا. وواضح أن مثل هذا التجريد للمكان والأعداد الذى لا تقوى عليه الشعوب البدائية أو شعوب حضارات ما قبل العلم كما رأينا، إنما هو شرط أول لتكون الفكر الرياضى الذى يسبح دائما فى مكان متجانس الأجزاء وأعداد مباينة للمعدودات .

أما الظاهرة الثانية فهى أنه عُنى بحل وبرهان مسائل متفرقة من الرياضة وإن لم يُعن بربط وتنسيق تلك المتفرقات فى نسق علمى موحد تتسلسل فيه النظريات كما هو الشأن فى الرياضيات الآن، ولكنه فى حله وبرهانه تلك النظريات إنما أبرز لنا بكل تأكيد فكرة

المعرفة العلمية علي حقيقتها لأن العلم استدلال على قضية ما. وهكذا برهن فيثاغور لأول مرة فى التاريخ النظرية الوحيدة التى تنسب إليه فى الهندسة القائلة بأن المربع القائم على الوتر فى مثلث قائم الزاوية يساوى مجموع المربعيْن المقامين على الضلعين الآخرين وذلك فى كل الحالات الممكنة لتطبيقها، وبغض النظر عن أطوال الأضلاع المعينة التي وقف عندها المصريون والهنود إذ لم يدركوا تلك النظرية كما رأينا إلا تطبيقين اثنين لها. وهذا البرهان الفيثاغورى المعروف فى كتب الهندسة كفيل وحده بأن يضع صاحبه فوق هامة العلم والطريقة العلمية، لما تكشفه عن اتجاه عقلى غير مسبوق ولفتة مبتكرة إلى تصور العلم كقضية لا تقبل فى مدينة العلم إلا مقترنة بالدليل على صحتها صحة عامة تنطبق على كل الجزيئات التى نصادفها لها فى التجربة .

إن الفارق الكبير بين الموقف العلمي **لفيثاغور** فى برهانة لنظريته والموقف العلمي عند المصريين والهنود هو أن نظرية **فيثاغور** تثبت علاقة هندسية عامة بين المربعات المقامة على أضلاع مثلث قائم الزاوية بحيث لا تتوقف تلك العلاقة على قياس معين لأضلاع المثلث كما عند المصريين والهنود بل بالعكس من ذلك تكون أسلوبا أو مبدأ عاما لقياس تلك الأضلاع فى كل احتمالاتها الممكنة، إذ يمكن

التساؤل مثلا عن طول الوتر عندما يكون الضلعان المجاوران للزاوية القائمة هما خمس وحدات وسبع، ففى هذه الحالة يكون المربع المقام على الوتر هو (٢٥ + ٤٩ = ٧٤) ولكن نلاحظ الآن أن العدد الدال على مربع الوتر وهو **٧٤** إذا أردنا أن نستخرج منه طول الوتر مقدراً بوحدات محددة وذلك باستخراج جذره التربيعى نجد أنه لا جذر تربيعى له بالأعداد الصحيحة إذ أن جذره التربيعى عدد لا ينتهى فى كسوره واقع بين **(٨ ، ٩)** وبهذا نجد أنفسنا أمام عدد غريب لأنه غير محدد أى غير قابل للقياس بوحدات معقولة مما يقاس به الضلعان الاخران.

فهناك إذن بسبب هذا العدد عدم تناسب أو عدم تقايس عددى بين أضلاع المثلث مما عرف منذ ذلك الوقت بالأعداد غير المتقايسة Incommensurables وهذا أول ما اكتشف من الأعداد غير المعقولة Irrational.

إن مؤلفى العرب القدامى اصطلحوا على أن يطلقوا على هذا العدد غير المعقول اسم العدد «الأصم» وهو الذى لا ينتهى جذره التربيعى إلى أعداد محصورة (مثل $\sqrt{٢}$) مثلا ، كما أطلقوا على العدد الذى يقبل عملية الجذر التربيعى فى أعداد منتهية العدد «المنطوق» .

وهكذا نرى كيف اصطدمت نظرية فيثاغور الهندسية منذ بدايتها بعقبة كَأْدَاءَ، هى ظهور أعداد صماء. فعندما انتقل فيثاغور من الهندسة إلى الحساب العددى لقياس أطوال الأضلاع ظهرت له هذه المشكلة غير المتوقعة، تلك الأعداد الصماء التى لا يقابلها شكل هندسى ما، سواء فى تربيعها لتكون مربعاً قابلا للقياس على ضلع من أضلاع المثلث أم فى جذرها التربيعى لتكون مستقيما يقاس من أضلاع المثلث بعدد منطوق على حد سواء. فتساءل كيف لا تستقيم نظريته الهندسية بالنسبة إلى الكثير من الأعداد وهى الأعداد الصماء، واعتبر ذلك «فضيحة» كتمها إلا عن تلاميذه وأوصاهم بألا يكشفوا سرها لكى لا يصيبهم شر. وهكذا اتخذت الفيثاغورية هيئة جمعية سرية عرفها التاريخ القديم طويلا، وعلى غرارها قامت جمعيات سرية فى التاريخ القديم والحديث ومنها إخوان الصفاء فى الحضارة الإسلامية.

إن تلك الفضيحة أو بالأحرى عجز الطرق الحسابية الذى كشف عنه وجود مثل تلك الأعداد الصماء منذ الخطوات الأولى للرياضة فى الحضارة اليونانية، يبين سبب عدم الركون إلى علم العدد أو الحساب فى حل المشاكل الرياضية فى تلك الحضارة وبالتالى عدم تطوره إلى جبر وتحليل. ومن ثم تأخرت منزلة الحساب فى العالم القديم وتقدمت

عليه الهندسة وقامت كعلم ناضج منذ البداية وخضع الحساب نفسه إليها. وحتى عند الفيثاغوريين أنفسهم نشاهد إخضاع علم العدد أو الحساب إلى الهندسة من أكثر من جهة .

أولا من جهة أن فيثاغور وتلاميذه لم يتراجعوا أمام مشكلة الأعداد الصماء فحاولوا التغلب عليها علي الوجه الآتى : حاولوا بالاستقراء جمع كل ثالوث من الأعداد الصحيحة (المعبرة عن أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية) لا يؤدى إلى عدد أصمٍّ. وفى ما يختص بالأعداد التى يؤدى جذرها إلى عدد أصم، حاولوا أن يحددوا ذلك العدد بوضع أقرب سلسلتين إليه من الأعداد الكسرية، إحداهما بالزيادة وأخراها بالنقص فيقع العدد الأصم بينهما.

أما الجهة الثانية لإخضاع العدد إلى الهندسة فناتج عن رمزهم للأعداد الحسابية بالنقط كما هو الأمر الآن فى ترقيم أوراق اللعب مثلا، وكانوا يرتبون تلك النقط في أشكال هندسية كالمستقيم والمثلث والمربع والمخمس والكثير الأضلاع فيحصلون بذلك على الأعداد المستقيمة والمثلثة والمربعة وهكذا. أعنى يحصلون دائما على أشكال هندسية، وابتداء من هذه الأشكال يتوصلون إلى الأعداد إذ قد وضعوا قواعد لكل شكل منها للحصول على ترتيب النقطة الأخيرة فيه الدالة على عدد الشكل مهما كان امتداده وكبره. وإنه لمن السهل

إدراك القاعدة العامة التى تعرف بها قيمة العدد (ن) فى أي شكل هندسى فهى على سبيل المثال فى العدد المثلث $\frac{ن(ن+١)}{٢}$ وفى العدد المربع ($ن^٢$) وهكذا .

ولقد درسوا خصائص الأعداد فميزوا الأعداد الأولية والأعداد الصماء والأعداد المنقسمة بالنسبة لكل عدد. وجاء من جمعهم لقواسم كل عدد أنهم ميزوا العدد المخصب أو المكثر وهو الذى يزيد مجموع قواسمه على العدد نفسه. ثم العدد المجدب أو المقل وهو الذى يقل عن مجموع قواسمه، ثم العدد الكامل وهو الذى يتساوى ومجموع قواسمه. مثل هذه الأبحاث التى شغف بها الفيثاغوريون فى الأعداد والتى عرفتها الكتب العربية القديمة لم تؤد إلى نظريات علمية ولم تستبقها الرياضة الحديثة وإن كانت مع ذلك لا تخلو من طرافة وعمق، ففيها مسائل لم تستطع الرياضة الحديثة حلها: فإن المسألة الفيثاغورية وهى هل يوجد عدد فردى وكامل معا؟ مسألة لم يجد الرياضيون المحدثون لها بعد حلاً، كما أنهم لم يبرهنوا على امتناع وجود مثل ذلك العدد .

ولاشك أن الفيثاغوريين لو اتخذوا رموزا للأعداد غير الأشكال الهندسية لتوصلوا كما يقول **ديرفوس** (Dryfus) إلى نتائج مخالفة بالمرة .

إن الذى نود أن نخلص إليـه مما تقـدم هو أن علم الأشكال أو الهندسـة كـان العلم الرياضى الذى نضج منذ البـداية والذى كـانت تحل بواسطة مشكلات الرياضة اليونانية وإليه أخضع الحساب .

وحـتى فى حـضـارة العـصـر الإسكندرى الذى ورث اليـونان والشعوب القديمة الأخرى والذى ابتدأت الرياضيات فيه بأخطر كتاب فى الرياضـة القديمة وهو «الأصول» **لأقليدس**، نجد أن علم الهندسـة هو مـوضـوع الكتـاب الأسـاسـى وأن علم الحسـاب ألحق بهـا كآخـر فصل من فصولها ومشتق منها.

حقيقة لقد انقلبت الأوضا ع الرياضية منذ القرن السابع عشر بعد أن ظهر الجبـر الحديث الذى هو تعمـيم للحسـاب ثم بعـد أن ظهرت الهندسة التحليلية التى هـى مـعـالجة للمشـاكل الهندسـية بـالطرق الجبرية، فأصبح علم التحليل الجبرى بنظرياته فى الدوال الرياضية المختلفة العلم الذى له الغلبة على علم الأشكال الهندسية، بل تراجعت هذه شيئا فشيئا حتى لم تعد هناك أشكال فى الهندسات المعاصرة وإنما النظر كله فيها منصب على أعداد فحسب بل وعلى تصورات منطقية خالصة، فاختلفت بذلك مكانة الهندسة فى العصر الحديث إذ أصبـحت مَسُودة بعـد أن كـانت سـائدة، وأصـبح التـحليل الجـبرى وبالتـالى العـدد سـائدا بعـد أن مَسـوداً، إلا أنـه رغم هذا الانقـلاب

والتطور فإن المنهج الذى اتبعه **أقليدس** أو بالأحرى المسائل المنهجية التى تضمنتها هندسته والتي أسهم الفيلسوفان - **أفلاطون** وبخاصة **أرسطو** - فى إرساء أسسها وإضاعتها حتى صارت هندسته مثالا علميا يحتذى طوال العصور. هذه المسائل المنهجية هى بعينها المسائل التى أثيرت أخيرا بالنسبة إلى الرياضة الحديثة فى وضعها الجبرى. وهذه المسائل كما سنرى متشعبة أشد التشعب ويؤلف مجموعها المسائل التى ستعنى بها فلسفة الرياضة التى هى موضوع هذه الدراسة. ولذلك نتوقف الآن عند النظر فى المنهج الذى اتبعه **أقليدس** فى «الأصول» ونبدأ منه للنظر فى إلقاء ضوء على كل الأبحاث المعاصرة فى أسس الرياضة بقسميها: الهندسة والتحليل.

الفصل الثالث

تعاون بين الفلسفة والرياضة منذ القدم في سبيل تأسيس علم رياضى وثيق

(٧) لا بديل فى ا لرياضة عن منهجها .

(٨) تعريف الرياضة بمنهجها .

(٩) تحليل أرسطو لأسس الهندسة وتطبيق أقليدس لهذا التحليل فى إقامة نسق استنباطى للهندسة .

(٧)

عندما انطفأت حياة **الأسكندر الأكبر** انتقل مركز الحضارة الفكرية من أثينا إلى الإسكندرية حيث أنشأ **بطليموس الثانى** فيلادلف بناءً ضخما سماه المتحف، ابتاع له نفائس مكتبات أثينا ومنها مكتبة الليسيه التى جمعها أرسطو. وجعله فى آن واحد مكتبة ومعهدا للدراسة وأكاديمية للعلماء الذين اجتذبهم من أطراف العالم شرقا وغربا يعيشون بين جدرانها وعلى نفقة الدولة. وفى قاعاته الفسيحة المزدحمة بأوراق البردى انتشر المؤلفون والنُسَّاخ والمترجمون ينقلون تراث الماضى ويهذبونه ويجددون فيه.

نحن الآن في عام ٣٠٠ ق . م، حيث نجد بين هؤلاء العلماء رجلا أحكم الصمت عن حياته حتى جهلنا كل شيء عن أصله وسيرته ومولده ووفاته. ولا نعلم من كلماته المأثورة غير تلك الكلمة التى أصبحت مثلا فى الكتب الأوروبية والتى ارتاعت لها حاشية الملك وذلك حين سأل الملك فى إحدى زياراته للمتحف رجلا ينظر فى أشكال هندسية رسمها فوق الأرض هو **أقليدس** بقوله : ألا تعرف طريقا آخر لإتقان الرياضيات وامتلاك ناصيتها غير طريقتك فى كتابك «الأصول»؟ (Elements) فأجابه **أقليدس** بأنه «لا يوجد فى الرياضيات طريق ملكى» وهو يعنى أن للعلم طريقته التى تفرض

ذاتها على كل من يطلبه والناس سواسية فيها. ولم يغضب **بطليموس** مع أن البطالمة اشتُهروا بسفك الدماء لأتفه الأسباب فقد كان يعمل على توطيد ملكه بإنشاء صروح للفن والعلم التى تخلد أسرته. وفيما يختص بعلم الرياضة بالذات توصل **بطليموس** ولا ريب إلى هدفه منذ إنشاء المتحف فإن كتاب «الأصول» فى الهندسة **لأقليدس** هو من الوجهة العلمية البحتة أوثق الكتب كلها التى انحدرت إلينا من الفكر القديم وأكثرها تداولا بعد الإنجيل عند الغربيين طوال العصور كما يلاحظ مؤرخ الرياضة **كوليروس** Colerus الذى قال كذلك إنه طبع أكثر من ١٥٠٠ طبعة بلغت نسخ بعضها أرقاما خيالية.

وسر النجاح المنقطع النظير لمؤلف **أقليدس** هذا عبر العصور لا يرجع إلى ابتكار **أقليدس** لنظريات جديدة ومتفرقة كما كان يفعل الفيثاغوريون من قبل وإن كان **أقليدس** فقد ابتكر فعلا وأضاف نظريات رياضية في مؤلفات أخرى له - وإنما يرجع سر نجاحه إلى الطريقة أو المنهج Methode الذى اتبعه فى كتابه «الأصول» فى استعراض النظريات المبعثرة المتناثرة المعروفة عند الفيثاغوريين السابقين، وذلك بتنسيقها فى نسق علمى موحد محكم الحلقات بحيث يتوقف فيه برهان كل نظرية لاحقة على نظريات أخرى سَبق برهانها وسابقة عليها فى داخل بناء منطقى يجمع كل النظريات المتفرقة ويستند بحذافيره إلى أسس أو مقدمات أو كما يقول هو إلى

«أصـول» مـحـددة قليلة ووثيـقـة تبـقى خـارج البـرهان لم يفطن الرياضيون إليها من قبله.

فى الواقع كـان الرأى الرياضى العـام قـد ضج بالفـضـائح الرياضيـة من النوع الذى صادفناه وزهد فى ابتكار نظريات جديدة تتعرض إلى الهدم والإنكار على أساس حجج سفسطائية بل كان قد سئم مثل تلك التُرَّهات. وتطلع إلى إيجـاد حل حـاسم لإقـامـة علم رياضى مـوحـد جـديد باسم العلم. إذن كـان الزمن قـد نضج ليثـمـر **أقليدس**. وكانت رسالة أقليدس أن يخرج ذلك العلم، إلى حيز الوجود وأن يكون سر نجاحه فى تأسيس ذلك العلم، الطريقة أو المنهج الذى اتبعه فى تنسيق نظريات الرياضـة المتـفرقة وربطـها برهانيا بحيث يسـتنبط بعـضـهـا من بعض. وهذه الطريقـة المثلي التى أثمـرت الرياضيات كلها حتى اليوم هى التى تساءل **بطليموس** عن إمكان بديل لها، فلم يجد عنها بديلا للملوك .

ها نحن نقف فجأة فى فلسفة الرياضة أمام فكرة «المنهج» الذي أثمرها كعلم، فإلى هذا المنهج تحول النظر منذ الآن وتكرس الانتباه ذلك لأن تحليل خطوات ذلك المنهج لبيان الأسس والأصول التى تقوم عليها الرياضة ونقد تلك الأسس وما يترتب عليها من قضايا رياضية هى المسائل التى تتناولها فلسفة الرياضة وتجيب عليها .

(٨)

ونحن عندما نثير فكرة المنهج فى الرياضة يجب أن نعود أدراجنا إلى الوراء، إلى ما قبل **أقليدس** نفسه، أعنى إلى الفلاسفة – لا إلى الرياضيين طبعا– الذين مهدوا ولا ريب **لأقليدس** فى منهجه الذى اتبعه لبناء علم رياضى. فهنا نلمس التعاون الوثيق الذى نشأ بين الفلسفة والرياضة ليس فقط فى مجال فلسفة الرياضة التى هى فلسفة. وإنما فى إقامة الرياضة ذاتها كعلم وثيق وذلك بفضل التحليل الفلسفى لأسس الرياضة .

وفى تلك العودة نمهد بتعريف للرياضيات على أسس منهجها كما يعرفها المحدثون.

لقد سبق أن عرفنا الرياضيات على أساس موضوعها وهو التعريف التقليدى لها الذى يقول إنها علم الكم والمقدار، أو علم الكم المتصل (الهندسة) والكم المنفصل (العدد) .

وألاحظ الآن أن هذا التعريف «بالموضوع» يعتبر اليوم غير صالح للتعبير عن طبيعة الرياضة ككل منسجم متسق يضم فروعا عديدة لا يدخل بعضها بكل تأكيد تحت مقولة الكم أيا كان لأن من فروعها أو موضوعاتها ما لا يمت للكم متصلا أو منفصلا بصلة. وربما كان سابقا لأوانه بيان أن هندسة كهندسة الوضع (Geometry of Situa-

tion) أو الحساب الهندسى عند **جراسمان** أو جبر المنطق عند **جورج بول** أو غير ذلك من النظريات الرياضية الحديثة لا حديث فيها عن الكم مع أنها نظريات رياضية .

لذلك فإن الاتجاه الحديث للتعبير عن طبيعة الرياضة ينحو نحو تعريفها تعريفا يتمشى مع كل فروعها كما يتمشى معها ككل منسق تتوقف فيه نظرية رياضية على نظرية أو نظريات أخرى. وهذا التعريف إنما هو تعريف لها بطريقتها أو منهجها لا بموضوعاتها التى تتناولها. إلا أن تعريف الرياضة بمنهجها على هذا النحو يكشف فى الوقت نفسه عن طبيعة موضوعها كما يتصوره المعاصرون الذين تخلوا عن التصورات القديمة للكم متصلا ومنفصلا كموضوع للرياضة. لكن هذا التعريف للرياضة على أساس منهجها إنما يحتاج إلى مقدمات لكى يفهم، لأنه لما كان يتصور الحديث لطبيعة الرياضة والتحول إلى الإتمام بمنهجها إنما نشأ عن حركة النقد الداخلى التى قام بها رياضيو القرن التاسع عشر لتصوراتهم الرياضية التقليدية وكانت نقطة انطلاق تلك الحركة إحدى مسلمات هندسة أقليدس التي حاول الرياضيون عبثا البرهان على صحتها كنظرية من النظريات فكشفوا بفشلهم المتكرر عن عوالم هندسة أخرى غير عالم **أقليدس**. ثم لما كان الكلام فى مناهج الرياضة قد

سبق إليه أرسطو وأقليدس المحدثين من الناظرين فى هذا الموضوع فإنه يجب أن نقف عند مذهب هذين المفكرين القديمين قبل أن نتناول موضوع النقد الداخلى للرياضة فى القرن الماضى الذى أثار موضوع فلسفة الرياضة فى الفكر المعاصر بكل ما فى هذا الموضوع من مواقف متعارضة متضاربة وحية.

(٩)

إن معرفة **أرسطو** برياضيات عصره، ودوره وعلماء الليسيه فى تقدمها وجمعها، وبصفة أخص تحليله هو نفسه لأسسها وأصولها مما تجمعه كلمة المنهج الرياضى، أمر لا مجال لشك فيه وهو ما يدل عليه على الأقل كتابه المسمى «التحليلات الثانية» الذى تناول فيه البرهان اليقينى أو بصفة أخص الرياضى من حيث صلة هذا البرهان بالمنطق الصورى. فبيّن أن اليقين الذى تمتاز به قضايا الرياضة ونظرياتها إنما هو مستمد من أنها علم برهانى (Demon-strative Science) أو كما يقال الآن علم استنباطى Deductive Science أو نظرية أكسيوماتيكية Axiomatic.

والعلم البرهانى عنده هو العلم الذى يحتاج لقيامه كعلم إلى نقط

بدء أى أسس أو مبادىء يبدأ منها برهان قضاياه ونظرياته. وتلك الأسس أو المبادىء قليلة العدد وغير قابلة للبرهان فى العلم الرياضى نفسه وإن كانت تبرهن فى علم أعلى كالميتافيزيقا التى هى علم المبادىء الأولى للوجود ومنها مبادىء الرياضيات طبعا.

من هذه المبادىء ما هو مشترك بين العلوم كلها كالمبادىء الأولية الثلاثة للوجود والفكر وهى الهوية وعدم التناقض والثالث المرفوع .

ومنها ماهو خاص بكل علم على حدة. وأهمها فيما يختص بالرياضيات ما يأتي :

١- التعريفات وهى قضايا تشرح معنى الحدود الأولية ولا يقال لها صادقة أو كاذبة، كتعريف الخط مثلا بقولك إنه طول لا عرض له.

٢- الأصول الموضوعة (Oxiomes) أو الأوضاع المتفق عليها وهى ما ترجمه العرب بعبارة «العلوم المتعارفة». وهى قضية لا برهان عليها وواضحة فى ذاتها، حتى لكأنما الإنسان يعرفها دائما إذا ذكرت أمامه كما أنه لا غنى عنها لمن يريد التعلم. ومثالها قولك : (الكل أكبر من الجزء) .

٣- المسلمات Postulats وهى ما نقله العرب فى كلمة «المصادرات» وهى أيضا قضية لا برهان عليها ولكنها تختلف عن

الأصل المتواضع عليه فى أنها ليست بينة فى ذاتها ويجد المتعلم عنادا فى قبولها ومن ثم فهو يصادر بها، حتي تتضح له فيما بعد ومثالها : المتوازيان لا يتلقيان مهما امتدا .

كل هذه المبادىء لا تبرهن فى العلم الذى يستند إليها وإنما فى علم أعلى كالفلسفة الأولى، ولكنها المبادىء التى تستمد منها براهين النظريات الرياضية سواء مباشرة أو مما سبق برهانه من النظريات بواسطتها.

إن مثل هذا التحليل الأرسطى غير المسبوق فى تاريخ الفكر الذى أوجزته هنا إنما يشهد بعناية هذا الفيلسوف الكبير بفلسفة العلوم منذ القدم ويشهد أكثر من هذا بأن هذا المؤلف الذى جعل من الليسيه معهدا لدراسة تاريخ العلوم والإسهام فى تقدمها كان أسبق من الرياضيين فى فحص مسألة مصادر اليقين الرياضى بفحص الأسس التى يقوم عليها البناء الرياضى كله. كما أنه وضع حجر الزاوية لتعاون لم ينفصم منذ ذاك الوقت بين الفلسفة والرياضة فأنشأ بذلك منذ القدم فلسفة الرياضة التي هى مجال هذا التعاون الدائم المثمر بين العلمين. لكنه لم يذهب إلى أبعد من هذا التحليل الرائع فى حد ذاته، فلم يقم نسقا رياضيا على هذه العناصر التى ميزها، بل ترك الرياضة نظريات مبعثرة وغير مؤتلفة فى بناء موحد

كما هو الشأن عند الفيثاغوريين.

وفيما يلى فقرات من كتاب النجاة (ص١١٢) للفيلسوف الإسلامى **ابن سينا** توضح ما أوجزناه عن **أرسطو**.

يقول **ابن سينا** : «الأصول التى تعلم قبل البرهان ثلاثة : حدود وأوضاع ومقدمات.

فالحدود تفيد تصور ما لا يكون بين التصورمن موضوعات الصناعة... مثل أن النقطة طرف لا جزء له، والخط طول لا عرض له، والسطح كذا.. وليست تفيد تصديقا البتة ولا فيها إيجاب ولا سلب.

وأما الأوضاع فهى المقدمات التى ليست بينة فى نفسها ولكن المتعلم يراود على تسليمها وبيانها فى علم آخر وإما بعد حين فى ذلك العلم بعينه، مثل ما نقول فى أوائل الهندسة أن لنا أن نصل بين نقطتين بخط مستقيم. ولنا أن نعمل دائرة على كل نقطة وبقدر كل بعد، ومثل أن الخطين إذا وقع عليهما خط مستقيم فكانت الزاويتان اللتان من جهة واحدة أقل من قائمتين فإن الخطين يلتقيان من تلك الجهة.

فما كان من الأوضاع يتسلمه المتعلم من غير أن يكون فى نفسه له عناد سمى أصلا موضوعا وما كان يتسلمه مسامحا وفى نفسه له عناد يسمى مصادرة..».

أما **أقليدس** الذى يكاد يكون معاصرا **لأرسطو** فقد كان كتابه المسمى «الأصول» دائرة معارف لما وصلت إليه رياضيات القدماء. فقد جمع فيه نظريات القدماء المبعثرة التى ظهرت فى القرون الثلاثة السابقة عليه ونسب بعضها إلى مكتشفيها وقدم الهندسة على نظرية الأعداد (الحساب) واشتق هذه الأخيرة من الأولى متأثرا بالفيثاغوريين. ونسّق هذا كله ولأول مرة فى التاريخ فى نسق أو بناء واحد محكم الحلقات بحيث يستند برهان كل نظرية لاحقة إلى ما تقدم عليها فى الترتيب داخل ذلك البناء وبحيث يستند النسق كله إلى تلك المقدمات أوالمبادىء التى ميزها أرسطو فى تحليلاته الثانية، ولا يمكن فهم أقليدس أو العمل الذى أنجزه فى كتاب الأصول إلا فى ضوء تعاليم أرسطو فى هذه التحليلات فحقق كتابه بفضل تأثير أرسطو أوثق علم انحدر عبر العصور من العالم القديم. ونحن لا نستطيع أن نحدد كيف تأثر **أقليدس** بـ **أرسطو** ولا كيف أخذ عنه ولكن الأثر أكيد وواضح.

وكما بين أرسطو فى تحليلاته كل نظرية يقينية أو برهانية إنما تقوم على قبول عدد قليل من المقدمات أو المبادىء تبدأ من البرهنة على كل القضايا القابلة للبرهان بينما تبقى تلك المقدمات خارج

البرهان وغير قابلة له فى نطاق العلم القائم عليها. وهذه المقدمات عند **أقليدس** هى :

١- **التعريفات أو الحدود.** وأعطى **أقليدس** ٢٣ تعريفا أو شرحا للحدود منها على سبيل المثال :

- النقطة ما ليس له بعد.
- الخط طول لا عرض له.
- المستقيم هو الخط المشابه لنفسه.الخ...

٢- **المسلمات أو المصادرات** وهى تختلف عن معناها عند **أرسطو** لأن أقليدس يعنى بالمسلمات أن أشكالا معينة هى أشكال ممكنة، ومن هذه الأشكال :

- مد خط مستقيم بين نقطتين.
- مد مستقيم إلى ما لا نهاية.
- كل الزوايا القائمة متساوية.
- إذا قطع مستقيم مستقيمين آخرين بحيث كان مجموع الزاويتين الداخلتين الموجودتين من جهة واحدة أقل من قائمتين فإن المستقيمين المذكورين أو امتدادهما يتلاقيان.

(وتسمى هذه بقضية المتوازين أو بالمسلمة الأقليدية الخامسة).

٣- **الأصول الموضوعة** أو العلوم المتعارفة وهى المعارف المقبولة عامة أى البديهية، وقد قبل **أقليدس** ٢٨ قضية من هذا النوع منها :

- الأشياء المساوية لشىء بالذات متساوية فيما بينها.
- الكل أكبر من الجزء ..الخ.

وعلى أساس هذه الأنواع الثلاثة من المقدمات أو المبادىء أو الأصول يبرهن **أقليدس** عددا كبيرا من القضايا المبرهنة. أى المشتقة بالبرهان، وهى إما نظريات Theoremes أو ملحقات Corolaires أو تمارين مشهورة..

وقد حلل **أقليدس** بالإضافة إلى هذا خطوات برهان كل نظرية على حدة فذكر ثمانى خطوات منها :

(١) ذكر منطوق النظرية Enonce

(٢) إعادة المنطوق مع الاستعانة بشكل مرسوم (Ecthese)

(٣) افتراض التسليم بصحة القضية (Epagoge) فيستعان بقضية أخرى سلم بها أو تم برهانها.

(٤) ثم الأشكال الإضافية أو انشاء الأعمال (Construction) وهو عبارة عن تحليل القضية التى يراد برهانها إلى أشكال أخرى مألوفة وأبسط منها الخ.. الخ.. حتى الخطوة الثامنة والأخيرة وهى إعلان النتيجة .

كل هذه الخطوات التى يمارسها فعلا الذين يقومون بالبرهان كانت معروفة قبله عند قدماء الهندسيين، وينسب **أفلاطون** إلى نفسه اكتشاف بعضها فى محاوراته. ولكن أهمية **أقليدس** لا ترجع إلى مثل تلك الخطوات العملية التى تتبع فى الحل وإنما فقط إلى أنه استنادا إلى تحليلات **أرسطو** الثانية استطاع أن يبنى نسقا استنباطيا واحدا لكل النظريات المبعثرة التى خلفها السابقون تستنبط فى داخله النظريات اللاحقة مما سبقها فى الترتيب ويستند الاستنباط برمته إلى قبول عدد محدود من المقدمات أو الأصول كما قدمنا.

ولما كنا سنتناول بالتفصيل طبيعة «النسق الاستنباطى» هذا عند المحدثين الذين يعرفون الرياضة بالإشارة إلى هذا المنهج وحده. فيجب أن نميز منذ الآن التصور المشترك بين **أرسطو** و**أقليدس** لهذا النسق.

نعلم الآن بعد الذى تقدم أن النسق الاستنباطى عندهما إنما يقوم على استخلاص مقدمات أو قضايا أولية أهمها الأصول الموضوعة (Axiomes) والمسلمات أو المصادرات (Postulats) ولا فارق بين النوعين إلا فى درجة الوضوح والبداهة لدى المتعلم: فالأولى أوضح بينما يعاند العقل فى قبول الثانية ويتقبله متسامحا وحسب. فإذا أغفلنا هذا الفارق السيكولوجى أو البيداجوجى

(التعليمى) فإن تلك القضايا الأولية تعتبر مطابقة للواقع ومعبرة عنه، أعنى تعتبر فى ذاتها أنها «حقيقية» فالحقيقة هى فى المطابقة التامة مع الخارج أو العالم الواقعى. هذا بكل تأكيد هو موقف **أرسطو** و**أقليدس** المشترك، والفيلسوف **كانط** (Kant) لم يتردد فى تأييد مثل هذا الرأى على نحو يختلف بعض الشىء عندما نظر إلى تلك القضايا الأقليدية الأولية على أنها قضايا «ضرورية» (Necessaires) لأنها تعبر عن خواص المكان الحقيقى الوحيد. وإن كان هذا المكان عنده ذاتيا فى الذهن البشرى وليس واقعيا فى العالم الخارجى كما عند **أرسطو** و**أقليدس**، وهذا هو الفارق بين الموقفين، ولكن هذا الفارق لا يؤثر فى كون تلك المبادىء الهندسية هى قضايا حقيقية لأنها معبرة مباشرة عن خصائص المكان سواء أكان فى الخارج (أقليدس) أم فى باطن الذهن (**كانط**)، فالخط يمتد عند **كانط** إلى ما لا نهاية والكل أكبر من الجزء والمتوازيان لا يلتقيان.. الخ..

والمناطقة المعاصرون عندما يتحدثون عن التصور المشترك بين **أرسطو** و**أقليدس** الخاص بطبيعة النسق الاستنباطى بقصد تمييزه عن تصور المحدثين يصفونه بأنه «نسق يقينى استنباطى» Susteme Categorico (انظر قاموس لالاند) والمقصود بهذه التيمة إبراز كلمة

«يقينى» التى تشير إلى الفكرة المميزة حقيقة لتصور القدماء وهى أن المقدمات أو المبادىء التى يستند إليها النسق «يقينية» أي مطابقة للواقع الخارجى وتبعا لذلك تكون أيضا القضايا المشتقة منها بالبرهان (النظريات) يقينية كذلك. ولذلك حكم مفكر مثل **كانط** بأن الهندسة الأقليدية هى الوحيدة الممكنة للإنسان لأن قضاياها ضرورية.

لكن التصور المعاصر للنسق الاستنباطى لا يرى هذه المطابقة ولا هذه الضرورة إذ يعتبر القضايا الأولية مجرد فروض Hypotheses أو أوضاع نتواضع عليها ولا صلة لها بالواقع الخارجى أو المكان كما أنها ليست ضرورية عند الذهن. وكل ما تمتاز به هو أنها يجب أن تكون غير متناقضة فيما بينها بحيث يمكنها أن تنتج طائفة من القضايا المشتقة أو النظريات التى لا تتناقض فيما بينها. وهذا التصور لا يسمح بالطبع بالتمييز بين مسلمات أو أصول موضوعة فكلها مجرد فروض أو أوضاع نتفق عليها، ومن ثم جاء اسمه، فالمناطقة المحدثون يصفون هذا التصور الجديد بأنه «نسق فرضى استنباطى» Systeme hypothetico - deductif (**بيانو** ومدرسته فى إيطاليا) أو Postulational System (أمريكا) أو Axiomatique

(**هلبرت** ومدرسته فى ألمانيا) وكلها عبارات بمعنى واحد هو أن المبادىء افتراضات، وكلها تعريف للرياضيات بمنهجها ومن وجهة نظر المحدثين.

إن هذا التصور الجديد للنسق الاستنباطى هو الذى جعل الرياضيين المحدثين يتكشفون عن أوجه النقص الشديد فى نسق أقليدس الهندسى فقد تبين الرياضيون أن نظريات **أقليدس** لا يمكن أن تنتج عن مقدماته الأولية وحدها لأن تلك المقدمات ناقصة نقصا ذريعاً .

فإمام الرياضيين فى مطلع هذا القرن وهو **هنري بونكاريه** Poin-care بينّ نقص المقدمات الخاصة بالنقلة (Deplacement). والرياضى الألمانى **مورتز باش** (pach) الذى عاش فى آخر القرن الماضى بين كيف أن هندسة **أقليدس** تنقصها المقدمات الخاصة بالترتيب أو النظام Axiomes D'ordre وبيّن الفيلسوف المنطقى **برتراند راسل** Russell كيف أن الثمانى والعشرين نظرية الأولى من كتاب أقليدس تستعمل ضمنا لا صراحة، عدة مقدمات مضمرة لم ينص عليها فى ثبت مقدماته. وكان **ديفد هلبرت** (Hilbert) شيخ الرياضيين فى ألمانيا حتى قبل الحرب الثانية أول من كمل وأتم

أكسيوماتيك هندسة **أقليدس** فى كتابه المسمى أصول الهندسة (١٨٩٩) وهذا النقص كله لمّا يبرر قول **برتراند راسل** بأنه لم يكن قبل **ديفيد هلبرت** برهان هندسى واحد سليم. أى يستنبط نتائجه بدقة من المقدمات المصرح بها فى بداية الهندسة ودون اللجوء إلى مقدمات أخرى مضمرة فى ذهن الهندسى.

خلاصة هذا كله تعاون بين الفلسفة والرياضة فى الكشف عن منهج الرياضة. تعريف للرياضة من حيث منهجها بأنها نسق استنباطى. اختلاف بين القدماء والمحدثين فى قيمة قضايا هذا النسق أهى حقيقية وضرورية أم هى مجرد افتراضات وأوضاع. نقص ذريع فى تحليل أقليدس لأصول الهندسة وتدارك هذا النقص عند الرياضيين المعاصرين.

الفصل الرابع

من النقد الداخلى فى الهندسة إلى الأكسيوماتيك الحديث

(١٠) حركة النقد الذاتى فى الهندسة ونشأة هندسات كثيرة فى القرن التاسع عشر .

(١١) معنى «الحقيقة» الرياضية الجديد ضد نظرية كانط فى أسس الرياضة .

(١٢) حركة تأسيس المسلمات فى الهندسة (الأكسيوماتيك) تبتعد عن «الحدس» وتلتقى بالمنطق الصورى

(١٣) اقتراح لبوانكاريه يؤكد مدى ابتعاد مسلمات الهندسة عن الحدوس أو الأشكال .

(١٤) الشروط المنطقية لتأسيس المسلمات عند الرياضيين المعاصرين .

(١٠)

ننتقل الآن من الفكر القديم إلى الفكر الحديث فى مناهج الرياضة. فلقد مهدنا بفكرة عن مناهج الرياضة عند أرسطو وأقليدس لأننا سنجد أن القرن التاسع عشر يهتم أيضا عند الرياضيين أنفسهم بفكرة المناهج فى الرياضة .

ونحن نشرع فى تناول المناهج الرياضية عند المحدثين فى كل من الهندسة وعلم التحليل (Analyse) على حدة، وهما القسمان اللذان يقتسمان الرياضة. فنحصر الانتباه الآن فى الهندسة وحدها مرجئين الكلام عن التحليل إلى مرحلة قادمة.

إنه في الهندسة بالذات بدأت ما يسمى حركة «النقد الداخلى» قبل أن تظهر فى التحليل. ونقصد بالنقد الداخلى حركة فكرية عند رياضيّي أوائل القرن الماضي جعلتهم ينصرفون عن التفكير فى الاستزادة من الاكتشافات الرياضية وعن تغذية علمهم بالإضافات الجديدة. ينصرفون عن ذلك كله إلى الاتجاه المضاد تماما، وهو التفكير فى فحص أو نقد نظرياتهم الرياضية القائمة والمقبولة عندهم إلى ذلك الوقت بقصد التثبت منها ومن سلامة براهينها. إن مثل هذا النقد هو بالطبع نقد ذاتى وباطنى فى داخل الرياضة القائمة فعلا.

هناك فى الواقع أبحاث طويلة عند الرياضيين فى القرن الماضى

بدأت بنقد داخلى لعلومهم وأدت آخر الأمر إلى الآراء الحديثة فيما يختص بالأسس والمناهج الرياضية .

وفيما يختص بالهندسة التي نُعنى بها الآن، كانت نقطة البدء فى حركة النقد الداخلى فيها المسلمة الخامسة عند **أقليدس** التي ذكرناها فيما سبق. فلقد أدرك الرياضيون منذ زمن طويل بأن تلك المسمة (مسلمة المتوازين) ليست واضحة وبديهية كغيرها وحاولوا إقامة البرهان على صحتها كنظرية من النظريات المبرهنة على أساس المسلمات الأخرى أو بقبول مسلمات جديدة أكثر وضوحا تنتجها. ومن هؤلاء المؤلفين **نصير الدين الطوسى** (القرن الخامس الهجرى) وفى العصر الحديث الأب **ساكيرى** Saccheri الرياضى الإيطالى (المتوفَّى ١٧٣٣) الذى جاء بما توهمه برهانا لها فكان برهانه إيذانا بنشأة هندسات غير أقليدية. ومجمل القول فى برهانه هو أن عدم استطاعة إثبات بطلان تلك المسلمة يتضمن فى ذاته صحتها، ولذلك فقد قَبِل الثماني والعشرين نظرية الأولى من **أقليدس** التي تبرهن دون حاجة إلى المسلمة الخاصة. ثم بعد ذلك امتحن النتائج التى تنتج عن القول ببطلان تلك المسلمة فلجأ إلى الشكل أ ب ج د الذى يتساوي فيه أ د ، ب ج ويسقطان عموديا على أ ب ثم امتحن الفروض الثلاثة الممكنة الناجمة عن القول بأن الزاويتين ج ، د

قائمتان (وهذا هو منطوق تلك المسلمة عند نصير الدين الطوسى) أو حادتان أو منفرجتان، وتلك الفروض الثلاثة تقابل القول بأن مجموع زوايا المثلث يساوى قائمتين أو أقل من قائمتين أو أكثر من قائمتين على الترتيب. فيرفض ساكيرى الفرضين الأخيرين لتناقضهما مع المسلمات الأقليدية الأخرى مستبقيا الفرض الأول ناظرا إلى أن استحالة إثبات بطلانه يتضمن فى ذاته صحة المسلمة المذكورة .

إن مجمل القول فى برهان **ساكيرى** هو أنه اعتقد فى قوة «برهان الخلف» فتصور فكرة محاولة البرهان على صدق قضية المتوازين باستنباط تناقض بين إنكار هذه القضية وقبول المسلمات الأقليدية الأخرى، فبرهان الخلف إذن هو عدم استطاعة استنتاج نقيض المسلمة الخامسة من المسلمات والنظريات المقبولة الأخرى.

إنه بغض النظر عن قيمة هذا البرهان السلبى الذى لا يبرهن القضية ذاتها وإنما فقط استحالة نقيضها أو بالأحرى استحالة بطلانها، أنبّه فوراً إلى أن قيمة هذا البرهان من وجهة النظر الحديثة إنما جاءت من أن هذا البرهان أتاح فرصة لتكوين فروض ثلاثة سيعرف فيما بعد أنها تقابل على الترتيب هندسة **أقليدس** التقليدية وهندسة **لوباتشفسكى** Lobatschevski وهندسة **ريمان** Reimann. وهاتان الأخيرتان هندستان جديدتان من المجموعة التى سيطلق

عليها الهندسات غير الأقليدية Non-euclidian Geometries .

ولقد بذل الكثيرون بعد **ساكيرى** جهدا منقطع النظير للبرهنة على صحة المسلمة الخامسة المذكورة أمثال **لوجاندر ودالمبير ولوجرانج**، وهذا الأخير تقدم عام ١٨٠٠ ببحث إلى الأكاديمية الفرنسية فى ما توهمه برهاناً لها حتى إذا هم بإلقائه اعتذر بأنه لابد أن يعيد النظر فيه. وهذا كله يشهد بفشل كل المحاولات فى البرهنة على صحة تلك المسلمة. وكان لابد لهذا الفشل المتكرر رغم الجهود الجبارة من أن يؤدى آخر الأمر إلى أن يفترض الرياضيون إمكان قيام هندسة غير أقليدية تكون فيها المسلمة المذكورة باطلة. والرياضى **هالستد** Halst-ed على حق حين لاحظ أن اكتشاف تلك الهندسة أصبح أمرا محققا فى مطلع القرن التاسع عشر. ففى عام ١٨١٦ أتم **كارل فردريك جوس** (Gauss) الألمانى بعد دراسة وثيقة، كتابا لم ينشره خوفا من صدمة للرأى الرياضى العام أثبت فيه وجود تلك الهندسة غير الأقليدية. ولكن الرياضى الروسى **لوباتشفسكى** الاستاذ بجامعة قازان كان أول من نشر أبحاثه فى تلك الهندسة عام ١٨٢٨ فعرفت باسمه تلك الهندسة التى اكتشفها **جوس** من قبل والتي تقابل الفرض الثانى من فروض **ساكيرى** .

ولم يمض غير قليل من الوقت حتى اكتشف **ريمان** عام ١٨٥٤

هندسة أجرى غير أقليدية على أساس الفرض الثالث من فروض **ساكيرى** يقبل فيها على خلاف **أقليدس** أن المستقيم لايمتد إلى مالا نهاية وإنما هو ينتهى حتما (وهذا عكس المسلمة الرابعة عند أقليدس التى تقبل مد الخط إلى ما لا نهاية) كما يقبل فيها أيضا أن كل مستقيمين على سطح واحد لابد يلتقيان فى نقطتين فلا توجد والحالة هذه مستقيمات متوزاية بالمعنى الأقليدى. وعلى العكس من ذلك تقبل هندسة **لوباتشفسكى** عددا لا ينتهى من المستقيمات المتوازية التى تمر كلها بنقطة واحدة خارج مستقيم ما.

وفى كل من هاتين الهندستين الجديدتين تتتابع القضايا أو النظريات تتابعا محكما كما هو الشأن فى هندسة **أقليدس** ولكنها بالطبع نظريات مختلفة فيما بينها بالنسبة للهندستين الجديديتن. كما أنها تختلف جمعيها عن نظريات الهندسة الأقليدية المألوفة لنا.

ومن المعلوم أن المكان (Space) الذى تقوم عليه هندسة **لوباتشفسكى**، انحناء السطح فيه سلبى محض ولذلك فإن تخيل الأشكال الهندسية التى تتحدث عنها غير يسير مع دقة تسلسل قضاياها، بيد أنه من الهين تخيل الأشكال فى هندسة **ريمان** عند مقارنتها بهندسة **أقليدس** لأن المكان فيهما إيجابى. ولكى نتخيل هذا يجب أن نتذكر أننا نعيش فى عالم طبيعى كله كرات، فالأرض

والكواكب كروية الشكل وعلى هذا فالهندسة المعبرة عن مثل هذا العالم كالهندسة الريمانية تكون هندسة واقعية بينما تكون هندسة **أقليدس** هندسة وهمية أي غير واقعية بالنسبة لعالم الكرات . مثلا :

- تكون المستقيمات الأقليدية الوهمية عبارة عن منحنيات أو أقواس أو دوائر مقفلة فى الهندسة الريمانية.
- يكون أقرب بُعد نقطيتين فى العالم الواقعى هو القوس الريمانى لا المستقيم الأقليدى الوهمى.
- يكون السطح الأقليدي سطح كرة فى الهندسة الريمانية فإذا تخيلنا هذا تتضح لنا القضايا الريمانية الآتية :
- كل مستقيم مُنتهٍ لأنه دائرى (وبهذا تسقط المسلمة الرابعة عند **أقليدس** الخاصة بمد خط إلى ما لا نهاية).
- المستقيمان يمكنهما أن يَحُدَّا سطحا أو مكانا.
- كل المستقيمات تتقاطع فى نقطتين، ومن ثَم لا توجد متوازيات(وبهذا تسقط المسلمة الخامسة) .
- مجموع زوايا المثلث تزيد على قائمتين زيادة تتناسب مع كِبر أضلع المثلث ولكن المثلث الريمانى المتناهى الصغر. مثلث أقليدى.
- السطح الريمانى له ثلاثة أبعاد بالقياس إلى السطح الأقليدى

كما أن المكان الريماني له أربعة أبعاد بالقياس إلى المكان الأقليدي ذي الأبعاد الثلاثة .

هكذا قامت هندسات ثلاث كل واحدة منها تقابل فرضا من فروض **ساكيري**. وخواص تلك الهندسات هي :

أولا : إن مجموع زوايا المثلث تساوي أو تقل أو تزيد على قائمتين على الترتيب .

وثانيا : إن كلا منها تنطبق على أسطح انحناء كل سطح منها كما يقول أصحاب الهندسة انحناء ثابت (Constant) وهذا شرط ضروري لانتقال الأشكال فوق أسطحها انتقالا حرا دون تشويه لها، فهو (أي الانحناء) صفر (أقليدس) وسالب (لوباتشفسكي) وموجب (ريمان) على الترتيب. وعلاقة تلك الهندسات فيما بينها عند المقارنة هي كما بين الرياضي **بلترامي** Beltrami كما يأتي :

م	الهندسة	السطح	الانحناء	مجموع زوايا المثلث
١	أقليدس	سطح	صفر	قائمتان
٢	لوباتشفسكي	مسطح شبه الكرة Pseudo - sphere	أقل من صفر	أقل من قائمتين
٣	ريمان	كروي	أكبر من صفر	أكبر من قائمتين

والنتيجة الهامة التى نخلص إليها مما تقدم فيما يختص بأسس الهندسة هى إذن، أن المسلمة الخامسة مستقلة منطقيا عن بقية مسلمات **أقليدس** .

وفكرة الاستقلال هذه هامة جدا لأنها تسمح لنا بأن نستبدل المسلمة الخامسة بغيرها ويكون البديل عنها إما نقيضا أو نفيا لها (ريمان) وإما مختلفا فقط (لوباتشفسكى) . فهو نقيض فى **ريمان** لأنه يقول إن كل متوازيين لابد يلتقيان عند امتدادهما إذ هما مجرد مستقيمين على سطح كروى واحد، فى حين كان **أقليدس** يقول أنهما لايلتقيان مهما امتدا. ثم عند **لوباتشفسكى** المسلمة البديلة مختلفة فقط عن مثيلتها فى **أقليدس** لأن لوباتشفسكى يقول أنه من نقطة ما خارج مستقيم يمكن إقامة عدد لا ينتهى من المتوازيات فى حين كان أقليدس يقول من نقطة ما خارج مستقيم، إن متوازيا واحدا فقط هو الممكن إقامته.

على كل حال ثبت الآن أن المسلمة الخامسة مستقلة عن بقية مسلمات **أقليدس** بحيث إذا ضُمّ بديل أو أكثر إلى المسلمات الأخرى تكونت هندسات مختلفة متتابعة القضايا أو النظريات. وهذا تغير جوهرى فى أسس الهندسة غير مسبوق ملىء باحتمالات أخرى للتغير. ذلك لأنه نشأ بالطبع سؤال جديد وهو هل يمكن إحداث

تغيرات أخرى فى أسس الهندسة بحيث ينشأ مزيد من الهندسات المنتظمة القضايا؟ .

مثلا هل يمكن وضع بديل أو أكثر لمسلمة أو لمسلمات أخرى أو هل يمكن قبول مسلمات جديدة فتنشأ هندسات جديدة؟ ذلك هو السؤال الذى سيطر على كل الأبحاث التالية فى الهندسة والذى لقى جوابا إيجابيا أيضا.

ولكى نلقي ضوءا على مثل تلك الإجابة دون أن نتورط فى تفاصيل فنية فى الرياضة ذاتها تبعدنا عن هدفنا فى تركيز الكلام حول المنهج والأسس نشير إلى أن الهندسات الثلاث المذكورة سابقا تفترض كلها أن أشكالها الهندسية يمكن أن تنتقل كلها فى عوالمها المكانية دون أن يصيبها أدنى تشويه، كما تنتقل الأجسام الصلبة فى مكانها الذى حددته كل واحدة من تلك الهندسات. وبما أن هذه النقلة الحرة شرط للقياس- قياس شكل على آخر - فى أي صورة كان ذلك القياس. وصور القياس فى الهندسات كثيرة كالمطابقة Con-gruenece والاستدارة حول نقطة أو ساق Rotation والمساواة Equality والتحويل Transformation والانعكاس Reflection وتبادل المواضع Permutation وغير ذلك من العمليات المعروفة عند الهندسيين للقياس، فإن تلك الهندسات الثلاثة تلتقى كلها فى اسم

مـشـتـرك هو أنهـا «هندسـات قـيـاسـيـة» (Metrical Geometries) .
فـينشـأ بالطبع عن ذلك الوضـع المشـتـرك سـؤال أول وهو، هـل هناك إمكان لإيجـاد تعـبـيـر عـام للهندسـة القـيـاسـة يكون بمثـابة الفكرة المحورية فيـها أو بمثابة قانونها العام المولّد لها ؟ ومثل هذا السـؤال يؤدى حـتمـا إلى التـسـاؤل : وهل توجـد هندسـة غـيـر قـيـاسـيـة؟ (Non-Metrical Geometry) وهـذا السـؤال الأخـيـر له أهـمـيـة لأنه يقودنا إلى الكلام عن بعض الهندسات غير القياسية.

لنأخـذ مثـلا الهندسـية الإسـقـاطيـة Projective. فى هذه الهندسـة على عكس هندسـة **أقليدس** لا تؤخـذ المسـاواة Egalite فى اعـتـبـار الأشكال وإنما تؤخـذ فقط فكرة المعادلة Equivalenee بينها إذ يكفى أن ننتقل من شكل إلى آخر بالتحويل الإسقاطى -Projective Trans formation أى أن يكون أحـد الشكلين، المنظر المسـقـط للآخـر دون مساواة بينـهما وهذا هو معنى المعادلة. ومن ثم فإن شكلا ما يعادل أو يناظر آخر فى الهندسـة الإسـقـاطيـة مـهمـا اختلف فى حـجـمـه ومساحته وأطواله.

وكثيرا ما يسمى هذا النوع من الهندسة الهندسة الكيفية -Geo motrie Qualitative لأن فكرة الكم تأتى فى المقام الثانى بالنسـبة للكيف الشكلى فى هذه الهندسات غير القياسية. ومع ذلك فإن فكرة

الكم لم تتلاش نهائيا، لأننا لا نستطيع أن نعرف مثلا أن خطأ ما هو مستقيم أم غير مستقيم إلا إذا أجرينا قياسا كأن نطبق عليه حرف مسطرة مثلا وهى آلة قياس .

لكن هناك هندسة تخرج منها فكرة الكم نهائيا مثل هندسة الوضع Geometry of Situation ففى هذه الهندسة يتعادل شكلان إذا أمكن الانتقال من أحدهما إلي الآخر بواسطة تشويه مستمر (Continuous deformation). مهما كان هذا التشويه بشرط أن يكون مستمرا أو متصلا Continuous. وعلى هذا فإن دائرة ما تكون معادلة لشكل بيضاوى أو لأى منحنى مقفل ولكنها لا تعادل خطا لأن الخط غير مقفل. كذلك تعادل الكرة مثلا سطحا مقعرا ولكنها لا تعادل عجلة السيارة أو حجر الرحى، لأنهما مفرّغان من الوسط. لنتخيل نموذجا يراد رسمه ثم رسما لذلك النموذج قام به رسام بدائى فإن النسب تتغير والخطوط المستقيمة التى ترسمها يد غير خبيرة تتعرج وتتشوه، هذان الشكلان من وجهة نظر الهندسة القياسية والهندسة الإسقاطية لا يتعادلان ولكنهما يتعادلان من وجهة نظر هندسة الوضع. وهذه الهندسة هامة وذات استعمال واسع.

الهندسة الإسقاطية وهندسة الوضع مثالان لهندسات غير قياسية. مثل هذه الهندسات القياسية وغير القياسية أمكن إيجاد

طريقة عامة لمعرفتها عندما أدخل **ريمان وجراسمان** Grassmann في وقت واحد تقريبا فكرة المكان ذى الأبعاد **ن** أعنى الذى أبعاده أكثر من ثلاثة كأن تكون أربعة (هندسة ريمان) وقد تكون غير متناهية . هذه الفكرة - فكرة المكان ذى الأبعاد **ن** (مهما كان عدد **ن**) لعبت دورا هاما فى الأبحاث اللاحقة الخاصة «بكل الهندسات المكنة، المعروف منها وغير المعروف، والقياسى وغير القياسى، تلك الهندسات المكنة التى تعتبر الهندسات السالفة الذكر (أقليدس - لوباتشفسكى - رميان - الإسقاطية - الوضع - الخ..) جزءا ضئيلا منها (من المكنات الهندسية).

هذه المكنات الهندسية كانت موضع اهتمام كثير من الرياضيين. ولقد عكف الرياضى **كلاين** Klein على تنسيق الهندسات المكنة منطقيا بحيث ننتقل من هندسة إلى أخرى حسب مبدأ معين مستعينا فى ذلك بالنظرية الجبرية المسماة نظرية المجموعات Theory of Groupes فانتهى إلى أن عدد تلك الهندسات المكنة منطقيا عدد لا ينتهى بالفعل، وكل واحدة منها تقوم على مسلماتها الخاصة بها. ولكن لم يدرس أحد من تلك المكنات الهندسية الكثيرة جدا إلا أقلها.

ومنذ ذلك العهد بدأ الهندسيون فى القرن الماضى يتحدثون عن - أو ينظرون فى - خواص هندسية مجردة دون الاكتراث لمسألة

اتفاقـها أو عـدم اتفاقـها مع عـالمنا الواقـعى أو الحـقـيقى. كـما بدت الهندسة علمـا بتلك الخـواص الهندسـيـة الممكنة، لا علما بخـواص لموجودات حقيقية. ونحن نعلم كم الفارق كبير بين الممكنات الفكرية وبين الوجـود الواقـعى. بدت الهندسة إذن علما بالخواص الهندسـية الممكنة عقلا لا علما بالموجودات. ذلك لأنهم أمام هندسات عديدة كل واحدة منها متسقة القضايا وليست واحدة منها أحق من غيرها فى الادعاء بأنها تعبر عن خواص المكان الحقيقى أو الفعلى كما كان الأمر عند الرياضيين فى تصورهم لهندسة **أقليدس** قبل اكتشاف الهندسات غير الأقليدية. وهكذا انحسرت أو تقلصت فكرة «الحقيقة» (Verite) فى الهندسة عن ميدان المطابقة بين قضايا الهندسة والعالم الواقـعى وانحـصـرت فى فكرة «عـدم التناقض» بين قـضـايا هندسـة واحدة بعينها أعنى انحصرت فى الإنسجام المنطقى لقضايا نسق هندسى ما فيما بينها.

وهذا تحـول خطير فى فكرة «الحـقـيقـة» عامة والرياضـيـة أو حتى العلمـيـة خـاصـة. والرياضـى **تورينوس** Taurinaus (المتـوفى عـام ١٨٧٤) عبر عن هذا بقوله :

«توجـد فى الهندسـة حـقـيـقـة باطنة (Verite Interne) وحـقـيـقـة خارجة (Verite Externe) والحقيقة الباطنة هى أن كل هندسة تؤلف

نسقا مقفلا على نفسه (Systeme ferme en soi) منسجم القضايا ولا تناقض بينها بحيث لا نتساءل حينئذ عن إمكان تطبيقها على الظواهر الخارجية... ولكن إذا كان لابد أن نتساءل هذا السؤال الأخير، فحينئذ تنشأ مسألة الحقيقة الخارجة التى يصح أن تضاف إلى هندسة ما وتلك مسألة غير رياضية وتتجاوز حدود الرياضة».

(١١)

خلاصة هذا أن مسألة «الحقيقة» التى يمكن أن ننسبها إلى قضايا هندسة، ما أصبحت تعنى فقط عدم تناقض تلك القضايا فيما بينها ولا تعنى إطلاقا المعنى القديم للحقيقية وهو مطابقة القضايا للواقع أو المكان الخارجى.

إن هذا التصور الجديد للحقيقة الرياضية طعنة نجلاء لنظرية **كانط** فى الحدس المكانى (Intuition Spacial) التى سيطرت طويلا على الفكر الرياضى والتى رأت فى هندسة **أقليدس** الهندسة «الوحيدة والضرورية» بسبب تعبيرها عن خواص المكان (Space) أو مطابقتها له، ولا فرق عندنا بين من يرى أن المكان قائم فى العالم الخارجى كالواقعيين جملة وعلى رأسهم **نيوتن** وبين من يقول إن المكان من العناصر القبلية التى يشتمل عليها الذهن الإنسانى وحده

دون العالم الخارجي **ككانط**، إذ لا يهمنا هنا في الحقيقة أن يكون المكان خارجيا بالنسبة للفكر الإنساني أو قبليا (Apriori) فيه وإنما يهمنا فقط أن نرى بوضوح كيف استقلت قضايا الهندسة عن المكان أيا كان، ولم تعد تقاس الحقيقة فيها بمدى صلتها بالمكان أو مطابقتها له وإنما تقاس فقط بميزان منطقي صرف هو عدم تناقضها فيما بينها في داخل كل هندسة على حدة. وهذا هو معنى الحقيقة الذي أدت إليه نشأة الهندسات وتطورها نتيجة لحركة النقد الباطني التي كانت المسلمة الأقليدية الخامسة نقطة الانطلاق فيها.

ومع ذلك لابد لنا من أن نشير هنا إلى نظرية **كانط** في معنى الحقيقة الرياضية، نظرا لمدى تأثير **كانط** الواسع في الفكر الفلسفي البحت وفي الفكر الرياضي أيضا الذي فلسف أو اهتم بمسائل فلسفية كالتي نحن بصددها هنا في أصول الرياضة . لقد أرادت الفلسفة النقدية بيان أن هندسة **أقليدس** - ولم يكن يُعرف غيرها في عصر **كانط** - هي الهندسة الوحيدة والضرورية من حيث هي معبرة عن خواص المكان الوحيد المعطى لنا في حسنا أو فكرنا. وهي لكي تثبت تلك الضرورة المعبرة عن ذلك المكان الوحيد رأت أنه يكفيها أن تبرر كيف أن كل أحكام تلك الهندسة (بل الرياضة كلها) أحكام على حد اصطلاحه «تركيبية قبلية».

أما إن أحكامها - أو بلغة الهندسة - نظرياتها هى تركيبية لا تحليلية، فهذا يتضح من أنه فى كل خطوة من خطواتها تتثبت نظرية من النظريات صفة جديدة لموضوع هندسى معروف لم نكن لنصل إليها لمجرد تحليل الموضوع وحده، ولكننا نضيفها إليه من خارجه ونركبها إليه تركيبا جديدا بواسطة ما نستدعيه من مسلمات أو نظريات سبق برهانها وما ننشئه من أعمال، كمدّ خط أو استدارة مثلث على ساق أو غير ذلك. مثلا لو أخذنا موضوع المثلث القائم الزاوية وحللناه ما وسعنا التحليل، فلن نعثر فيه كيف يكون المربع المقام على الوتر يساوى مجموع المربعين المقامين على الساقين الآخرين، إذ لابد من إنشاء الأعمال التى ترد الموضوع الحاضر إلى أشكال مألوفة فى نظريات سابقة إلى المسلمات كما هو واضح من برهان **فيثاغورس** المعروف فى كتب الهندسة، فنركب بذلك الصفة الجديدة، أى المحمول إلى موضوعه. بعبارة أخرى كان لابد أن نرجع إلى المكان الحدسى فى ذهننا ونمارس نوعا من التجربة الحدسية فيه التى تمثلها تلك الأعمال لكى نصل إلى هذا التركيب .

بقيت صفة القَبْلية. فكون تلك الأحكام التركيبية هى أيضا قبلية أى سابقة على التجربة الخارجية بالحواس. ومن ثم ضرورتها وكليتها (لأن الضرورة والكلية تجملهما كلمة القبلية) فذلك يتضح من أن المكان الذى ننشىء فيه الأعمال أو نجرى فيه التجربة الرياضية

الحـــدســـيـــة إنما هو مكان قـــبلى فى ذهننا، أو على الأصح فى حـسـاسـيـتنا.. فـعلى خـلاف **نيـوتن** الذى وضع المكان فى العـالم الخارجى، نجد **كانط** لكى يؤكد القبلية فى أحكام الرياضة يضعه فى حساسيتنا كبطانة لها فهذه مهيأة بطبعها بصورتى المكان والزمان كشـرطين صوريين مـسـبقين لتلقى كل إحساس خارجى أو باطنى. فترجع بذلك قبلية الأحكام التركيبية الرياضية إلى قبلية صورتى الحساسية (المكان والزمان). والمكان بصفة خاصة هو الشرط القبلى لقـيام الأشكال الـهندسـيـة. أما الزمـان فـهـو الشرط القبلى لسلسلة الأعداد الطبيعية. والمكان فوق ما يبيحه من إقامة أعمال وأشكال هو الذى تعبر عن خواصه أو طبيعته المسلمات الأقليدية تلك المسلمات التى تستمد منها الهندسة قوتها ووجودها كعلم وثيق، فمن خواص ذلك المكان مـثلا مد خط إلى ما لا نـهاية. وهى المسلمـة الرابعة (لأن المكان لاينتـهى) والمتوازيان لا يلتقيان (المسلمة الخامسة)، والأبعاد ثلاثة (تعريف الجسمية) والكل أكبر من الجزء، إلى آخر ما هناك من خـواص لهذا المكان القبلى الوحيد، عبرت عن مجموعها المسلمات الأقليدية واستمدت منها ضرورتها التى لا سبيل إلى القول بغيرها فـتصـبح تلك المسلمات ومن ورائـهـا كل القـضـايا الهندسـيـة قـبلية ضرورية لأنها تعبر عن ذلك المكان القبلى الوحيد. وعلى هذا لا يمكن أن تقوم من وجـهـة نظر **كانط** هندسة أخرى غير الهندسة الأقليدية

فهى الهندسة بالذات لأن ضرورتها مفروضة علينا بطبيعة تركيبنا الذهني (الحساسية).

وها نحن نرى الآن كيف تنهار الفلسفة الرياضية عند **كانط** بعد أن عرفنا أن المكان ليس واحدا، إذ هناك من الأمكنة ما أبعاده **ن** (ن فوق الثلاثة أبعاد). ثم بعد أن عرفنا أن الهندسة الأقليدية ليست إلا واحدة من عدد لا ينتهى من الممكنات الهندسية. ثم أيضا بعد أن عرفنا أن الحقيقة الهندسية تعنى اتساق أو انسجام مجموعة من القضايا غير المتناقضة التى تستنبط من عدد من المسلمات، ثم أخيرا بعد أن علمنا أن المسملات تختلف من هندسة إلى أخرى ولا يصح أن ننسب إليها صفة الحقيقة بمعناها القديم أى المطابقة لخواص مكان ما لأننا لا نعلم أي مجموعة من المسلمات حقيقية بهذا المعنى وكل ما نستطيع أن ننسبه إلى كل مجموعة منها من معانى الحقيقة هى أنها مجموعة قادرة على تحمل عبء البرهان على عدد من القضايا المعينة دون تناقض بينها، وهذه هى «الحقيقة» التى تلازم كل «نسق استنباطى فرضى» (Systeme hyothetico - de- ductive) كما سبق بيانه، أى ما يسمى أخيرا بالأكسيوماتيك (Axi- omatique) (راجع المقارنة بين نسق أقليدس والمحدثين فقرة ٩).

(١٢)

كما قلنا ليس البحث فى منهج الرياضة هو دراسة لطرق حل المسائل الرياضية مسألة.مسألة، فذلك موضعه دروس الرياضيات. وإنما البحث فى منهج الرياضة هو بحث فى الأصول أو الأسس أو المبادىء التى تستند إليها وتستمد منها قوتها. ولقد سبق أن عرضنا لموقف القدماء (أرسطو وأقليدس) من مسألة الأسس والأصول فى الهندسة بالذات. ثم فى مرحلة تالية بيّنا كيف أن الهندسيين المحدثين فى القرن الماضى فى إطار حركة نقد باطنية فى الهندسة نفسها وانطلاقا من المسلمة الأقليدية الخامسة تأدوا شيئا فشيئا إلى إدراك استقلالها عن غيرها من المسلمات وإلى اقتراح أكثر من بديل لها مما أدى بهم إلي هندسات غير متوقعة. كما تساءلوا عن إمكان تغييرات أخرى فى مسلمات غير المسلمة الخامسة. وكان حصيلة هذا كله نشأة هندسات كثيرة غير أقليدية وغير قياسية. وظهر معها تصور جديد للحقيقة الهندسية لا يمت بصلة إلى مطابقة المسلمات للمكان سواء أكان واقعيا وخارجيا أم كان قبليا فى الذهن. ولقد جعلنا عنوان هذا الفصل من النقد الباطنى إلى الأكسيوماتيك الحديث وها نحن نصل الآن إلى الكلام عن هذا الأكسيوماتيك الذى هو بحث حول المسلمات نفسها من جهات كثيرة .

فلقد تبينا فيما سبق أن عددا يسيرا من الهندسات الممكنة كان موضع الدراسة عند الهندسيين المحدثين وهذه الدراسة تنحصر فى تحديد مسلمات كل هندسة معينة من الهندسات وحصر القضايا أو النظريات التى تترتب عليها ويؤلف مجموعها موضوع تلك الهندسة، تلك هى الحركة التى عُرفت فى تاريخ الرياضة منذ الربع الأخير من القرن الماضى باسم الأكسيوماتيك (Axiomatique) أى مباحث تأسيس أو – إن أمكن التعبير، تأصيل الهندسة أى إرجاعها إلى أصول (حسب اصطلاح **أقليدس** فى عنوان كتابه) وقد افتتح الرياضى الألمانى **مورتز باش** Pasch أبو الأكسيوماتيك الحديث تلك الحركة منذ عام ١٨٨٢ ثم أسهم فيها على غراره رياضيون ومنطقيون كثيرون من معاصريه من أمثال **بيانو** Peano أستاذ التحليل بجامعة تورينو، وتلاميذه الكثيرون ونخص بالذكر منهم **فيلاتى** Vailati **وبييرى** Pieri **وأنريكس** Enriques، ثم **ديفيد هلبرت** أستاذ الرياضة بجامعة برلين، ورياضيون من أمثال **هلستد** Halsted **وفلبن** Velben وغيرهم .

والبرنامج الذى افتتحه **مورتز باش** هو الذى عبر عنه بألفاظه الآتية :

«إذا كانت الهندسة تريد أن تقوم كعلم استنباطي فيجب أن يكون الاستنباط فيها مستقلا عن المعنى المألوف للألفاظ الهندسية كالنقطة والخط والسطح.. الخ كما يستقل كذلك عن الأشكال. وكل ما يجب أن يحصر الذهن فيه عند الاستنباط هو العلاقات التى تقوم بين تلك الألفاظ والتى تعبر عنها المسلمات والتعريفات».

ويفسر **مورتز باش** هذا التصور الاستنباطي الذى وصفه لنا فى تلك الفقرة على النحو الآتى بألفاظه :

«الاستنباط الرياضى غرضه أولا البرهان على خاصية جديدة لشىء هندسى ما، وثانيا بيان العلاقة المنطقية بين القضايا. ولذا يجب ألا ينزلق أى خاطر ضمنى أعنى أى فرض أو قضية حدسية (بديهية) أثناء البرهان إلى جوار المسلمات وما يترتب عليها من قضايا مستمدة منها. فالاستنباط الدقيق يجب أن يبرز فقط تسلسلا منطقيا للقضايا كما أنه يجب أن يستمد كل قوته من المسلمات المصرح بها منذ البداية دون أدنى استعانة بأي حدس فى أية صورة له كشكل مرسوم أو مسلمة نضمرها فى أذهاننا أو قضية ندخلها خلسة على أنها بديهية. ومن ثم تجىء ضرورة كون الاستنباط صوريا (Formal) ورمزيا (Symbolic) معا دون الاستعانة بالأشكال

الهندسية كما هو مألوف فى هندسة **أقليدس** تلك الأشكال التى رأى فيها كانط مبررا لنظريته. هذا وتلك الصورية (Formalism) يجب أن تمتد كذلك إلى المسلمات نفسها».

معنى هذا أننا فى الهندسة لن ننظر بعد ذلك فى أشكال وأعمال وإنما فقط فى علاقات منطقية صرفة أو كما عبر هو فى قضايا صورية ورمزية وتمتد هذه الصورية الرمزية لتشمل المسلمات أيضا .

وهكذا نرى من هذا البرنامج الذي وضعه موريتز باش ومن تفسيره له، كيف انتهى آخر الأمر ذلك النقد الباطنى للهندسة، التى هى علم الأشكال الحسية بالرياضيين أنفسهم من أمثال **موريتز باش** وتلاميذه إلي إغفال الأشكال وإلى تناول موضوعاتهم فى ضوء العلم الصورى الرمزى الشقيق أعنى علم المنطق. وهذا هو ما أدى بدوره إلى الإسراع بإصلاح المنطق نفسه وإخراجه من ركوده الطويل كعلم أشبه بعلوم اللغة وتحويله إلى علم رياضى ناضج ليقوم بدوره الجديد الذى أصبح جوهريا بالنسبة إلى تأسيس وتأصيل الرياضة على نحو يستبعد معانى الألفاظ الهندسية والأشكال الحسية ويستبقى رموزا صورية وعلاقات منطقية فحسب .

هذا الجانب من تطور المنطق الصورى ليقوم بدوره الهام فى تأسيس الرياضة سنفرد له بحثا لاحقا (أنظر فقرة ٢٣) ولنعد إلى

برنامج **مورتز باش**. فهذا المؤلف الذى لخصنا برنامجه يضع القاعدتين الآتيتين لتأسيس المسلمات فى النسق الاستنباطى الهندسى .

(١) يجب النص صراحة (Explicitement) عن التصورات والألفاظ الابتدائية (Concepts Primitifs) التي بواسطتها سنعرف كل التصورات أو الألفاظ المشتقة (Derives) الواردة فى هندسة ما.

(٢) يجب النص صراحة عن القضايا الابتدائية (وهى المسلمات التى بواسطتها ستبرهن القضايا المشتقة (التى هى النظريات) في كل هندسة معينة. وتلك القضايا الابتدائية يجب أن تعبر فقط عن العلاقات المنطقية الصرفة التى توجد بين التصورات الابتدائية المقبولة، كما يجب أن تكون مستقلة عن المعانى المعتادة فى القاموس لتلك التصورات (لأن تلك المعانى أشياء حدسية وشخصية تعيق الاستنباط الصورى البحت).

مثال واحد يكفى لبيان كيفية تطبيق ومراعاة القاعدتين السالفتين:

إذا افترضنا أننا نعرف معانى النقطة والخط والسطح. يمكننا أن نضع المسلمة الآتية :

«إن أى نقطتين فى سطح ما إنما تتصلان معا بمستقيم معين يحتويه بحذافيره ذلك السطح».

فـإذا فـرضنا الآن أن كـلا من المسـتـقـيم والسطح عـبـارة عن «طائـفـة» (Class) من النقط فـإنه يمكننا أن نتـرجم تلك المسلمـة بعـلاقـات منطقـيـة صـرفـة كـعـلاقـتى «الانتـمـاء» (Appartenance) و«الاحتواء» (Inclusion) وتصـور منطقى مثل «الطائفة»، فنقول مثلا فى تلك الترجمة المنطقية الصرفة : «إن نقطتين ما مما «ينتمى» إلى الطائفـة «سطح» «ينتـمـيـان» أيضـا إلى الطائفة «مـسـتـقـيم» كـمـا أن العناصر التى تؤلف «المستقيم» «محتواة» فى عناصر «السطح» .

وهنا نلاحظ أن الألفاظ (نقطة ومستقيم وسطح) فقدت مـعـانيـهـا العادية المألوفة فى القواميس أعنى أنـهـا فقدت صفة كونها حدوسا هندسيـة أى أشكالا مكانية لها صلة بالمكان، وحل مـحـل تلك المعـانى التـصـور المنطقى «طـائـفـة» (Classe). فـعندنـا الآن من جـهـة ثلاث طوائف مـخـتلفة (النقطتان، الخط، السطح) ومن جهة أخرى العـلاقات المنطقية القـائمة بينهـا وهـى (الانتمـاء والاحـتـواء)، وعلى هذا النحـو لو عبـرنا عن تلك الألفاظ وعن عـلاقـاتهـا أيضـا برمـوز جبـرية بعـضـهـا متغير (Variable) وبعـضـهـا ثابت (Constant) كما فى الرياضة نجد أنفـسنا آخـر الأمـر أمـام قـضـايا منطقـيـة صـرفـة لا توحى بأشكال هندسـيـة مـا إذ هـى مـسـتـبـعـدة تمامـا هنا. وهكذا تبدو أهـمـيـة دور المنطق فى ثوبه الرياضى الجديد بالنسبة للعلوم الرياضية.

ولقد حذا كثيرون كما قلنا حذو **موريتز باش** فى تصوره الأكسيوماتيكى (أو التأسيسى) للهندسة. وعمموا طريقته فى تناول الهندسة فى صورها المختلفة أعنى فى تأسيس كل الهندسات على أصول ومسلمات مبتكرة. وبروح كالتى حدت بالفيلسوف والرياضى **ليبنتز** أن يبرهن كل قضية رياضية وحتي المسلمات نفسها لأنه يرفض البداهة كعلامة لصدق المسلمة، عكف هؤلاء الرياضيون على تنقية الهندسة من المسلمات التى قبلها القدماء بسبب وضوحها الحدسى أعنى بسبب بداهتها لصلتها بالمكان، وكذلك على البحث عن مسلمات أخرى أكثر بساطة تلقي ضوءاً على مسلمات القدماء البديعية أو تنتجها. ويمكن تلخيص اتجاهاتهم فى مباحثهم الخاصة بتأسيس الهندسات فى النقط الأساسية الآتية :

١- البحث عن كل مسلمة مضمرة (Postulat implicit) والنص عليها صراحة (بدلا من استعمالها ضمنا وإدخالها فى البراهين خلسة) وذلك بالنسبة إلى كل هندسة على حدة، مثلا فيما يختص بهندسة **أقليدس**، بينّ **موريتز باش** أنها تضمر مسلمات الترتيب (Or-dre) التى لم ينص عليها **أقليدس**. كما بين **هنرى بوانكاريه** كذلك أنها فاقدة أيضا لمسلمات النقلة (Deplacement) .

٢- تكوين نسق «كامل» (Systeme Complet) لمسلمات كل

هندسة على حدة، مثلا كوَّن **ديفيد هلبرت** D. Hibert عشرين مسلمة لهندسة **أقليدس** (وهى طبعا تختلف عن مسلمات **أقليدس** نفسه) كما كون **بيانو** ١٨ مسلمة للهندسة الوصفية (Geom. Descriptive)، **ماريو بييرى** Pieri ٢١ مسلمة للهندسة الأسقاطية (Geom. Projec-tive) وهكذا.

٣- الاجتهاد فى الاقتصاد فى عدد المسلمات بأن ترد مسلمات كل هندسة إلى أقل عدد ممكن، مثلا استطاع **إنريكس** Enriques أن يرد المسلمات الإحدى والعشرين المقبولة عند **بييرى** بالنسبة للهندسة الإسقاطية إلى تسع مسلمات فقط. وهذا الاقتصاد فى المسلمات لحق أيضا التصورات أو الألفاظ الابتدائية التى تعرف فى أول النسق كما سنبينه فيما بعد.

٤- العمل على أن تكون المسلمات غير مستمدة من الحدس المكانى كما أراد القدماء وإنما عبارة عن علاقات منطقية كما بيّن **باش**. مثلا يستعمل **ديفيد هلبرت** علاقتى «الاشتمال» (Apparte-nance) أو «التطابق» (Congruence). ثم أن تلك العلاقات المنطقية إنما تقوم كما بين **باش** بين عناصر أو تصورات ابتدائية تُختار اختيارا عسفيا أو تحكميا (Arbitaire) كما تمليه إرادة الباحث. قليلة العدد وتُجرد من معانيها الحدسية المكانية المألوفة فى القاموس

ويُنظر إليها كما لو كانت كائنات أو خصائص صورية بحتة لا صلة لها بعالمنا الواقعى ولا معنى لها غير ما تحدده لها العلاقات المنطقية من معنى تقدمه على هيئة مسلمات، إذ المسلمات هى التى تحدد معنى الحدود الابتدائية وذلك ببيان كيفية استعمال تلك الحدود. مثلاً هندسة **أقليدس** اختار **هلبرت** النقطة والمستقيم والسطح حدودا أولية.. واختار **فايل** Weyl النقطة والمتجه الحر (Vecteur libre) **وبوانكاريه** النقطة والنقلة، **وبييرى** النقطة والمسافة بين نقطتين. فى كل هذه الحالات الاختيار تحكمّى عسفىّ وفق إرادة الباحث ولا يوجهه سوى اهتمام الباحث بفكرة دون أخرى.

٥- إذا تم هذا التأسيس الصورى للمسلمات بالشروط المذكورة آنفا، يعمل الرياضى على أن يستنبط بقوة المنطق وحده أى دون الإلتجاء إلى الحدس (كالأشكال المرسومة أو حتى المتخيلة) أو إلى أية مسلمة جديدة لا تشتمل عليها مجموعة المسلمات الابتدائية. أن يستنبط قضايا أو نظريات الهندسة التى هى موضع النظر .

هكذا عَدَل الرياضيون (الذين عملوا على تأسيس الهندسات على تلك الأسس الصورية المنطقية) عن الأشكال والأعمال إلى النظر فى مجرد علاقات منطقية صرفة. بهذه المناسبة أنبّه إلى أن العدول عن البراهين الهندسية المعتمدة على الأشكال وإنشاء الأعمال التى أسهب

المناطقة الكانطيون **فى** الحديث عنها تحت اسم التركيب (Construc-tion, Synthese) والأحكام التركيبية **والتى لا يزال بعض** المنطقيين المحدثين من أمثال **جوبلو** C blot فى **كتابه** Traite de logique الذى **اشتهر** فى فترة **ما بين** الحربين وهو **من** المجددين **لكانط** ولمذهبه **فى أسس** الرياضة، ويردد صدى **كانط** على نحو يختلف بعض **الشئ** حين يذهب **إلى** أن الاستنباط هو التركيب (Deduire c'est construire) أعنى أن الاستنباط الرياضى أو المنهج إنما يقوم فى جوهره **على** تركيب أشكال جديدة ترد النظرية موضع النظر إلى أشكال سبقت معرفتها وذلك بواسطة الأعمال (Constructions) وهذا هو البرهان الرياضى عنده. وهكذا كما يقول المنطقى **نيكود** Nicod مواطن **جوبلو** وناقده «بينما لا يزال الفلاسفة الناظرون فى البرهان الرياضى يتأملون صفة زائدة وخارجة على صفات ذلك البرهان، فإن الرياضيين أنفسهم قضوا على تلك الصفة لأنهم يرون فى الالتجاء إلى الحدس علامة لفجوة أو ثغرة يدخل منها مبدأ أو قضية مضمرة لا تشتمل عليها مجموعة المسلمات الأولية ولا تسمح باستنباطها وهم يحاولون التعبير عن تلك القضية المضمرة فى هيئة حدسية ما».

(١٣)

إن الذى وصلنا إليـه فى هـذه المرحلة الخـاصـة بأكسـيـومـاتيك الهندسة هو أن أصحـاب هذا العلم الباحثين فى أسسه ومبادئه قد افقدوا الألفاظ الهندسية المستعملة فى بداية كل نسق استنباطى هندسى معـانيها الحدسية أو المكانية المذكورة فى القـامـوس والتى يمكن أن ترسم فى أشكال كما حولوا المسلمات الهندسية الحدسية (الدالة على أشكال فى المكان) إلى مجرد علاقات منطقية.

ونريد الآن أن نواصل بيـان هـذا الموقف الجـديد على نحـو آخـر يختلف بعض الشىء عما تقدم، وإن كان يلقى عليه كل الضوء، وذلك بالوقوف قليلا عند اقتراح عجيب **لهنرى بوانكاريه** Poincare ثم نتابع الكلام فيما بعد عن الشروط المنطقية لإقامة الأكسيوماتيك .

الواقع إن خلاصة ما فرغنا آنفا من بيانه هو أن كل أكسيوماتيك بالمعنى الحديث يصل إلى درجة من التجرد والعموم والبعد عن الأشكال الحدسية بحيث أنه لا يأخذ معنى أقليديا أو ريمانيا أو حتى هندسيا أو عدديا أو غير ذلك، إلا عند تفسير حدوده الأولية كأن نلصق بها معنى ريمانيا أومعنى أقليديا أو غير ذلك. وهذا هو الذى وضحه **هنرى بوانكاريه** بطريقته الخاصة التى تختلف عما سبق بيانه ولكنها تبين بكل تأكيد كيف أن الأكسيوماتيك الحديث أفقد

الهندسات معانيها الهندسية المألوفة، وذلك باقتراحه فى كتابه العلم والفرض (ص٥٦-٥٨) تأليف قاموس هندسى يعطى كل المعانى الهندسية الممكنة لكل لفظ أو حد من الحدود الأولية، وللمسلمات المستعملة فى كل أكسيوماتيك، وهذا القاموس ييسر ترجمة مسلمات هندسة ما إلى هندسة أخرى، وكذلك القضايا أو النظريات المترتبة عليها، كما يسهل أيضا ترجمة مسلمات هندسة واحدة بالذات إلى هندسات مختلفة، ومن أمثلة هذا القاموس عند **بوانكاريه** ما يأتى :

«المكان... جزء من المكان يوجد فوق السطح الأساسى.

السطح... كرة تقطع عمودياً السطحَ الأساسى .

المستقيم ... دائرة تقطع عمودياً السطح الأساسى .

الكرة... الكرة

الدائرة... الدائرة.

الزاوية ... الزاوية .

الخ»...

يقول **بوانكاريه** إنه بمثل هذا القاموس يمكن أن نترجم نظريات **بولوباتشفسكى** إلى لغة أقليدية والعكس بالعكس، تماما كما نترجم نصا ألمانيا إلى الفرنسية، والعكس بالعكس بواسطة قاموس ألمانى فرنسى، ويمكن تأليف قواميس مشابهة أخرى .

هذا الاقتراح الذى جاء به **بوانكاريه** يؤكد مرة أخرى أن الهندسة عند الأكسيوماتيكيين المحدثين، أصبحت شيئا مجردا وصوريا، أى بعيدا كل البعد عن حدس المكان فى أى صورة له، وهكذا ننتقل من هذه النقطة إلى بيان الشروط المنطقية أو الصورية التى يجب أن تتوافر فى إقامة نسق أكسيوماتيكى من هذا النوع .

(١٤)

لقد تبينا فيما تقدم أن المسلمات فى الأكسيوماتيك الحديث كما وضح **مورتز باش** تتكون من علاقات منطقية بين حدود أولية كالنقطة والخط والحركة الخ قليلة فى عددها، وتُختار اختيارا عسفيا وفق وجهة نظر الباحث، كما تُجرد عن معانيها الحدسية أو الهندسية، وتُتصور كمعانٍ منطقية، هذا الجانب الصورى من الأبحاث المتعلقة بأسس الرياضة وطرقها أثار مسألة منطقية أخرى هى الشروط المنطقية التى يجب أن تتوافر في تأسيس أو اختيار المسلمات. ومن ثم فنحن ننتهى الآن إلى أن ندرس فى اختصار الشروط المنطقية التى يجب أن تراعى عن تأسيس الأكسيوماتي، وهى على الترتيب :

(١) استقلال كل مسلمة عن الأخرى.

(٢) عدم تناقض المسلمات .

(٣) الشرط الذى سماه **هلبرت** شرط «الإشباع» (Saturation) أى كون عدد المسلمات الخاصة بهندسة ما هو ما يكفى بالضبط لاستنباط نظريات تلك الهندسة بحيث لا يمكن زيادتها أو نقصانها إلا وأدى ذلك إلى قضايا هندسة مخالفة.

نريد الآن أن نتناول كلَّ شرط من تلك الشروط على حدة.

لقد تنبه أصحاب الهندسات غير الأقليدية فى القرن الماضى إلى بعض هذه الشروط عندما بين **ريمان** مثلا أن نفى المسلمة الخامسة يؤدى إلى هندسة منسقة القضايا غير أقليدية. ومن قبل هؤلاء فى القرن السابع عشر تنبه الفيلسوف الرياضى المنطقى **ليبنتز** إلى بعضها مثل شرط عدم التناقض، فإن **ليبنتز** كان يطمح فى برهان كل قضية ممكنة وحتى المسلمات الرياضية - لكى لا يقبل قضية من غير برهان - وذلك بأن يردها إلى الهوية أى الذاتية (Identite) ببيان أن محمولها لا يتناقض وموضوعها. وإنما يتأتى هذا بأن يجد تصور المحمول مكانا طبيعيا ومنطقيا فى تصور الموضوع، فيكون بذلك جزءا من هويته أو ذاتيته. ويتضح من ذلك أن **ليبنتز** لم يكن يقصد عدم تناقض مسلمة مع أخرى وإنما كان يقصد عدم تناقض مسلمة بعينها فى ذاتها أو مع ذاتها .

أما الأكسيوماتيك الحديث فإنه لا يُعنى بمسألة حقيقية المسلمة

فى ذاتها لأنه لا يُعنى بمسلمة منفردة كما كان يقول **ليبنتز** وإنما يُعنى بطائفة من المسلمات مجتمعة معا لتأسيس نظرية رياضية واحدة، ومن ثم كانت مسألة التئام تلك المسلمات معا. أي عدم تناقضها فيما بينها. هى المسألة المنطقية الأولى والهامة فى إقامة النسق الأكسيوماتيكى. ولكن كيف نعرف أن طائفة من المسلمات غير متناقضة فيما بينها؟ هذه مسألة عسيرة جدا كما بينت دراستها. فإن **هلبرت** يعرف عدم التناقض بقوله إنه «استحالة استنباط قضية ما تناقض تلك المسلمات، أى تكون نفيا كليا أو جزئيا لإحدى المسلمات». وإذن لا يمكن البرهان مباشرة على عدم تناقض المسلمات فيما بينها وإنما يكون ذلك فقط بطريق غير مباشر وهو عدم العثور على قضية مستنبطة منها وتكون نفيا لإحداها. وواضح أن مثل هذا البرهان غير أكيد ولا حاسم لأننا إذا كنا لا نعثر فى الحالة الحاضرة لطائفة من المسلمات الخاصة بنظرية رياضية ما أية قضية مستنبطة منها تكون متناقضة معها، فإننا لا نستطيع أن نجزم باستحالة ذلك فى مستقبل قريب أو بعيد.

مثل هذا الاعتراض جعل **هلبرت** يفكر فى طريقة أخرى مباشرة للبرهان على عدم تناقض طائفة من المسلمات فيما بينها، وهذه الطريقة هى أن نعطى للمسلمات تفسيرا مشخصا فى هذا العالم

فنبين أنه توجد أشياء فى عالمنا هذا تنطبق عليها المسلمات. وهذا التفسير هو الكفيل فى رأيه بعدم تناقضها. وأفضل التفسيرات الممكنة عنده التفسير العددى، لأن الأعداد كما يقول نموذج اليقين عند الرياضيين وبها يقيسون صحة كل قضاياهم.

إن هذا الأسلوب فى تفسير المسلمات بالأعداد للتحقق من عدم تناقضها ليس غريبا على كل من حاول حل مسألة جبرية وأراد أن يتحقق من صحة النتيجة باستبدال الحروف بالأعداد .

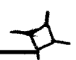
هناك بالطبع اعتراض جوهرى على ما ظنه **هلبرت** طريقا مباشرا للبرهان بقبوله تفسيرا عدديا للمسلمات وهو أن الأعداد نفسها جزء من أهم أجزاء الرياضيات التى يراد تأسيسها كلها على أسس أكسيوماتيكية فكيف تتخذ معيارا أو محكا لليقين بعدم تناقض المسلمات فى أى فرع من فروع الرياضة؟ أليست الأعداد نفسها فى حاجة إلى مسلمات؟ ألم يعرف التاريخ القريب محاولات مختلفة لإقامة مسلمات تنتج الأعداد؟ إذن يجب أيضا استبعاد التفسير بالأعداد كبرهان على عدم تناقض المسلمات.

على كل حال يبدو أنه لا يوجد إلى الآن أى طريق مباشر للبرهان بيقين على عدم تناقض المسلمات والباب مفتوح أمام مزيد من البحث.

هذا وشرط عدم التناقض عند **هلبرت** شرط متضمن فى الشرطين الاخرين : الاستقلال والإشباع. فإن هلبرت يقول إن مسلمة ما تعتبر «مستقلة» عن المسلمات الأخرى إذا كان نفيها يؤلف مع هذه المسلمات الأخرى مجموعة غير متناقضة. (لنتذكر المسلمة الخامسة عند **ريمان** فهى نفى للمسلمة الخامسة عند **أقليدس**) ويقول **هلبرت** إن طائفة من المسلمات تصل إلى درجة «الإشباع» إذا كانت إضافة أية مسلمة جديدة تؤدى إلى جعل تلك الطائفة متناقضة.

لنمتحنْ عن قرب فكرة الاستقلال، وهى فكرة عرفها أصحاب الهندسات غير الأقليدية، فهم عند محاولتهم البرهان على المسلمة الخامسة توصلوا إلى اكتشاف استقلالها عن غيرها من المسلمات الخاصة بالمستقيم والسطح والتطابق وغير ذلك مما يسمح ببرهان الثمانى والعشرين نظرية الأولى فى **أقليدس** دون ما يليها مما يحتاج إلى المسلمة الخامسة. فأدركوا عندئذ أن برهان استقلال المسلمة **س** عن المجموعة **ص** إنما معناه عدم تناقض **ص** مع **لا س** وهذا هو ما أدى إلى هندسة **ريمان** مثلا. ومنه أخذ **هلبرت** تعريف استقلال المسلمة. هذا هو رأى **هلبرت** فى معنى استقلال المسلمة .

ولكن يعترض بعض الرياضيين على فكرة الاستقلال نفسها فيقولون إذا كانت كل مسلمة مستقلة حقا فى معناها عن غيرها فى



طائفة من المسلمات فإنه يمتنع الاستنباط بسبب عدم الاشتراك أو الاتصال بين معانى مسلمات الطائفة المذكورة. وإذن فلابد أن يكون هناك إشتراك ما - لا استقلال أو انفصال تام - بين طائفة من المسلمات بحيث يمكن استنباط قضايا أو نظريات منها. وهذا الاشتراك ربما أمكن فهمه فى ضوء التمييز الذى ذهب إليه الرياضى الإيطالى **ببو ليفى** (Beppo Levi) بين الاستقلال المطلق والاستقلال المريب (Independ Ordonnee) أما الاستقلال المطلق فمستحيل معه الاستنباط لأن المسلمات تكون حينئذ غير مشتركة فى شىء ما، أما الاستقلال المرتب فهو الذى إذا توافر لدينا **أ ب ج** كطائفة من المسلمات لنظرية ما، يريد ببساطة أن يقول إن **ب** لا تنتج عن **أ** وإن **ج** لا تنتج عن **ب** أى أن هناك ترتيبا فى الاستقلال كما هو واضح. وهذا لا يمنع بالطبع إمكان استنباط **أ** من **ب** و **ج** معا، ومثل هذا هو ما يسمح بالاشتراك بعض الشىء فى المعنى .

على كل حال يبدو أن الاستقلال خاصية نسبية واقتصادية وجمالية فى آن واحد أكثر منها خاصية حقيقية أو منطقية أو أى شىء آخر من هذا القبيل، أما أنها نسبية فلأنه لا يمكن أن يكون هناك استقلال مطلق لما يؤدى إليه مثل هذا الاستقلال من امتناع الاشتراك فى المعنى مع بقية مسلمات الطائفة. أما أنها اقتصادية

فلأنه من الاقتصاد الفكرى أن لا تكرر مسلمة شيئا مما تقوله الأخرى فيكون هناك الحد الأدنى فقط من المسلمات. أما أنها قيمة جمالية بالإضافة إلى ذلك فيرجع إلى أن فى الاقتصاد جمالا وأناقة كما فى استقلال المسلمة استقلالا نسبيا كذلك. على كل حال ليس هناك رأى حاسم فى هذا الشرط.

بقى الإشباع وهو أقل الشروط حظوة في مناقشات **هلبرت**. وأول معانيه عنده هو أن طائفة معينة من المسلمات تكفى بمفردها بالقيام بمهمة استنباط قضايا أو نظريات فرع معين من فروع الرياضة.

ثم توسع **هلبرت** بعد ذلك فى معناه بحيث تضمن فكرة أن أية مسألة أو نظرية تثار فى داخل فرع ما يجب أن يفصل فيها بالسلب أو بالإيجاب على أساس تلك المسلمات نفسها. وتحديد هذه الفكرة عسير بعض الشىء ولكن يمكن القول بأنه يريد أن يقول إن فرعا رياضيا ما إنما تصل مسلماته إلى درجة الإشباع إذا تعذر لقضية ولنقيضها معا أن يَنْتُجَا فى آن واحد عن المسلمات. على كل حال لا تزال مسألة الإشباع موضع نقاش مفتوح لدى الرياضيين.

نرى من هذا أن الشروط الثلاثة وهى عدم التناقض والإستقلال والإشباع، متصلة متداخلة فيما بينها وأنها لا تزال موضع نظر من قبل من يهمهم الأمر بحيث يعسر أن يبت فيها بكلمة نهائية وفاصلة

من وجهة نظر الرياضيين أصحاب الشأن.

والآن بعد هذه الجولة فى صميم الأبحاث الخاصة بتأسيس الهندسة لا نقول إننا استنفدنا كل ما يمكن أن يقال عن هذه المسألة من تفاصيل كثيرة من وجهة نظرة المناهج. ولكني أعتقد أننى جلوتُ الكثير مما غمض من مسائل، وروضت الكثير مما يستعصى فهمه إلا على الرياضيين، وبينت أن المطلوب الأول فى فلسفة الرياضة الإحاطة بالأسس البعيدة التى تستند إليها الهندسات، كما بينت الفارق بين موقف القدماء وموقف المحدثين، وأن موقف المحدثين الذى سماه المناطقة النسق الاستنباطى الفرضى إنما درسناه تحت الاسم المفضل عند الرياضيين وهو «الأكسيوماتيك»، وبينت كيف أن الحركة الأكسيوماتيكية التى تميزت باتجاهات عديدة إنما ثمرتها الأخيرة الحاسمة، ابتعاد الهندسات عن الحدوس المكانية والبراهين المستندة إليها مع التحامها وثيقا بالمنطق الصورى وحده بحيث أصبحت المسلمات مجرد علاقات منطقية بالغة التجريد والبعد عن الأشكال المكانية إلى حد أن رياضيا مثل **بوانكاريه** اقترح قواميس للمسلمات والحدود الأولية لإمكان ترجمة هندسة إلى أخرى، وبينت فى خاتمة المطاف الشروط المنطقية لإقامة نسق من المسلمات المنطقية المجردة على ذلك النحو، تلك الشروط التى ما كانت توجد وتوضع موضع

البحث لولا أن أصبحت المسلمات مجرد علاقات منطقية صرفة. ومن كل هذا يتضح أننا عندما نبحث فى منهج الهندسة فمعنى ذلك أننا نؤسسها كنسق استنباطى على مسلمات لا تمت للواقع الخارجى بصلة وإنما فقط إلى المنطق الصورى وحده، وهذا ما يضىء فكرة الحقيقة الهندسية بضوء جديد فى إطار نظرية عامة للمعرفة الرياضية مؤداها أن التصورات الرياضية تصورات من طبيعة منطقية أو صورية بحتة.

الفصل الخامس

تحسيب الرياضة وأكسيوماتيك العدد

(١٥) الجبر والهندسة التحليلية

(١٦) النقد الباطنى فى التحليل ينتهى إلى نبذ فكرة «الاتصال الهندسى» ويستعيض عنها بالأعداد

(١٧) دور الأعداد التخيلية فى تحسيب الرياضة.

(١٨) برنامج المذهب الحسابى ومثال رد الأعداد التخيلية إلى الأعداد الصحيحة.

(١٩) رد الأعداد الصماء إلى الأعداد الصحيحة.

(٢٠) نظرية الأعداد اللامتنهية دعم للمذهب الحسابى.

(٢١) أكسيوماتيك العدد.

(١٥)

إن ألفاظ هذا العنوان ستتضح فيما بعد. ونبدأ الآن من القول بأن الخطوات التى تتبّعناها من النقد الداخلى إلى الأكسيوماتيك الحديث فى الهندسة يمكن أن نتبع مثليتها فى علم «التحليل» (Ana-lyse).

لقد كان **ديوفانت** Diophante الرياضى الإسكندرى صاحب الكتاب المعروف باسم «ارتماطيقا» (Arithmetique) أى الحساب، أول من تعرض لفكرة إيجاد كم مجهول له نسبة ما، إلى كميات أخرى معلومة، ولكنه وقف فى معالجته لمثل هذه الفكرة (التى أثمرت الجبر) عند الطرق الفيثاغورية التى كانت ترمز لكل عدد بخط أو بشكل هندسى أكثر تعقيدا والتى كانت تحل البراهين الهندسية محل العمليات الحسابية المعهودة الآن.

وما سبب ذلك إلا لأن رموز الأعداد والعمليات لم تكن معروفة فى حضارتى اليونان والإسكندرية، كما أنه فى ما عدا منطق أرسطو الذى استعمل حروف الهجاء للدلالة على حدود القياس لم تعرف تلك الحضارات القديمة استعمال حروف الهجاء للدلالة على الأعداد. فكان **ديوفانت** «يتكلم» الجبر ولكنه لم «يكتبه»، مع العلم بأن كتابة الجبر حيوية بالنسبة إليه ولا غنى عنها فيه لأنها جوهره ولبابه. ورغم

ذلك فإن طريقة **ديوفانت** التى لم تستند إلى رموز جبرية وهى طريقة إستخراج كم مجهول له نسبة إلى كميات معلومة هى الطريقة التى امتدحها **ديكارت** أبو الفلسفة والرياضيات فى العصر الحديث فى كل مؤلفاته كطريقة مثلى للرياضة وأسماها لأول مرة «تحليل القدماء» (Analyse des Anciens) فأصبحت كلمة «التحليل» منذ ذاك الاسم الغالب فى الاستعمال العلمى عند الأوروبيين للدلالة على الجبر والرياضة العليا بما فيها أيضا الهندسة التى تعالج بالطرق الجبرية.

وعرف الهنود أيضا تلك الطريقة وكان براهماجبتا (-Bramagup ta) يستعمل الألوان المختلفة رمزا للمجهولات .

ولكن الجبر فى وجوده الحقيقى كعلم ذى موضوع خاص إنما ندين به فى الحقيقة إلى عالم من علماء بغداد عاش فى القرن الثالث الهجرى (= التاسع الميلادى) هو **محمد بن موسى الخوارزمى** الذى حرّف الأوربيّون اسمه الأخير إلى لفظ **لوغارتم** Algorithme للدلالة أيضا على هذا العلم الذى اكتشفه وإن كان هذا اللفظ أطلق فيما بعد على فرع محدد من الحساب الرياضى . فقد استخلص **الخوارزمى** من طريقتى الهند **وديوفانت** معا فكرتى «الجبر والمقابلة» ليدل بهما على طريقتين خاصتين باستخلاص المجهول: واللفظ الأول الذى قدر له الخلود كما يؤخذ من معناه فى اللغة العربية هو أن

يُجبر أو يُكمل كل طرف من طرفى المعادلة، وذلك بأن تنتقل المقادير الناقصة من طرف إلى آخر بالزيادة فلا تبقى فى الطرفين غير الأعداد بالزيادة. وأما المقابلة فهى طريقة أخرى تقوم على حذف المقادير المتماثلة أى «المتقابلة» فى طرفى المعادلة، وهاتان طريقتان توقَّف قيام الجبر على استخلاصهما ومراعاتهما ويغنيان عن البراهين الهندسية.

ولكن **الخوارزمى** كان «يتكلم» الجبر أيضا لأنه لم يهتد إلى الرموز الهجائية. لذلك يقترن الجبر فى العصر الحديث باسم مكتشف آخر هو الرياضى الفرنسى **فيت** Vite الذى عاش قبيل **ديكارت** بنحو نصف قرن فهو أول من خلص تلك الطريقة من استعمال ألفاظ اللغة وحتى من أعداد الحساب حين استعمل حروف الهجاء للدلالة على الأعداد وحين أدخل بعض العلامات الدالة على العمليات التى تجرى على تلك الحروف. فأثمر ذلك كله أنه ميز عما كان يسمى حينئذ Logistica Numerosa أى حساب العدد وهو علم الحساب، العلم الآخر المسمى Logistica Speciosa أى علم الأنواع (باعتبار أن الحرف الهجائى بمثابة نوع لأعداد غفيرة) أعنى علم الجبر والرمز، وارتفع بهذا الأخير إلى مرتبة من التجريد والعموم لاتعهد فى الحساب العددى، واتضحت بذلك قوانين أو علاقات بين

المقادير العامة بطريق المعادلة لم تكن ميسورة فى حساب الأعداد مثل قانون الاقتران (Law of association) الخاص باختلاف اقتران الحدود داخل الأقواس بحيث لا تتغير القيمة التى يشير إليها طرفا المعادلة كما فى :

(أ + ب) + ج = أ + (ب + ج)

وكذلك مثل قانون التوزيع Law of Distribution الخاص بالتوزيع بين الجمع والضرب كما فى :

(أ + ب) (ج + د) = أج + أد + ب ج + ب د

ولكن جبر **فيت** سرعان ما توقف أمام عقبات جاءت من اقتران الجبر والعمليات الجبرية فى ذهنه بالأشكال الهندسية التي لم يستطع **فيت** التخلص منها. وفى هذا يقول الرياضى **برنجشهيم** Pringsheim فى دائرة المعارف الرياضية التى ظهرت تحت إشراف الرياضى **مولك** Molk باللغة الفرنسية فى أوائل القرن العشرين والتى استعرضت أجزاء الرياضيات كلها مسلسلة مرتبة، يقول (فى المجلد الأول ص ٤٠) : «إن **فيت** هو الذى علمنا كيف نحسب بالحروف الدالة على الأبعاد دون أن نخرج عن حدود النظر فى الحروف نفسها. وذلك باستعمال رمز خاص يسمح بأن نطبق العمليات الرياضية على الحروف كما لو كانت الحروف ممثلة لأعداد

معينة. ثم إن **فيت** هو صاحب الفكرة فى تجديد طريقة القدماء (الإشارة إلى طريقة **ديوفانت**) وذلك بإذابتها فى الجبر الجديد. ولكن **فيت** وقف مع ذلك فى منتصف الطريق عند خطوته الأولى وذلك لأنه لم يعرف كيف يتخلص على نحو كاف من التفسير الهندسى للعبارات الجبرية ذلك التفسير الذى كان مألوفا عند القدماء، فهو عندما جعل حرف **أ** مثلا فى مقابل خط مستقيم، بدا له أن يجعل (**أ ، أ**) مثلا فى مقابل المربع، و (**أ.أ.أ**) فى مقابل المكعب... هذه المقابلات منعته من أن يعطى للعلم الذى بعثه وجدده كل ما هو جدير به من صفة العموم والتجريد».

هذه الفقرة المقتطفة من كلام **برنجشهيم** التى تبين فضل **فيت** فى إدخال الحروف الجبرية، وأيضا فى استعمال رموز للعمليات وبذلك استقام له الجبر كعلم، تبين فى الوقت عينه لِمَ توقف **فيت** عند خطواته الأولى نتيجة لاقتران هذه الحروف والعمليات التى تجرى عليها بأشكال هندسية تقابلها بالضرورة، مما حد من قدرة هذا العلم عندما لا توجد أشكال هندسية لأعداد أو عمليات مثل **أ**^{4} إذ الخيال يعجز أن يجد شكلا هندسيا بعد المكعب المعبر عنه بالعدد **أ**^{3} أو (**أ.أ.أ**).

إن هذه الفقرة التى تبين عدم استطاعة **فيت** التخلص من

الهندسة حين كان يفكر جبرا، هى فقرة هامة جدا من وجهة نظر أبحاثنا القادمة لأنها تبين كيف أن الجبر أو علم التحليل كله لا يمكن أن يتقدم إلى الأمام، إلا إذا تخلص نهائيا عند تأمل رموزه - حروفا وعمليات من النظر فى أشكال هندسية، أى عندما يتخلص من «حدس المكان» كما يصطلح **كانط** الذى سبق أن عرضنا نظريته وأثرها فى الفكر الحديث فيما يختص بأسس الرياضة.

وفى الواقع إنما يرجه الفضل فى تخليص الجبر من العوائق الهندسية إلى **رينيه ديكارت** فى اكتشافه للهندسة التحليلية التى حولت الرياضة الحديثة كلها من النظر فى أشكال مكانية إلى النظر فى التحليل الذى هو تنسيق عام لكل العلاقات الموجودة بين المقادير أيا كان نوعها، فأحلّ **ديكارت** التحليل بذلك المحل الأول فى الرياضيات الحديثة وتراجعت الهندسة من مكانتها القديمة في الريادة أو القيادة للفكر الرياضى. ونقطة البدء فى هندسة **ديكارت** هى التى عبّر عنها فى أوائل كتابه المسمى **«الهندسة»** حيث يقول :

«كل مسائل الهندسة يمكن أن يعبر عنها على نحو يكفى معه أن نعرف عددا معينا من الخطوط المستقيمة لكى نحصل على التركيب المطلوب الحصول عليه، وكما أن الحساب يرد إلى أربع أو خمس عمليات فكذلك الهندسة ترد بالمثل إلى العمليات نفسها، نجريها على

خطوط مستقيمة ينظر إليها كأنها أعداد فحسب. وعلى هذا فإذا كان **أ** و **ب** يمثلان خطين مستقيمين فإن **أ + أ** أو **أ × أ** لا يمثلان مستطيلا أو مربعا وإنما خطا مستقيما نسبته إلى **أ** كنسبة **ب** إلى الوحدة (وحدة القياس) وكذلك العوامل والجذور والأسس فإنها تمثل جميعها خطوطا مستقيمة. وبالجملة نتائج العمليات هى دائما مستقيمات».

وهكذا لم تعد الهندسة تلعب دورا جبريا كما هو الشأن فى تصور **فيت**، ولكن لا يمنع هذا من استعمال العبارات الهندسية الدارجة مثل مربع ومكعب وغير ذلك للتعبير عن رموز جبرية مثل $أ^{٢}$ و $ب^{٢}$ الخ.. على شريطة ألا نفهم من هذا التعبير إلا خطوطا مستقيمة فحسب كما يريد **ديكارت**.

إن هذا الرأي الذى عبر عنه **ديكارت** فى أوائل كتابه «الهندسة» هو من وجهة نظر تاريخ الرياضة أكثر ثورة مما يبدو للنظرة العادية ذلك لأنه استبعد كل الأشكال الهندسية من النظر فى التحليل، عدا المستقيم طبعا، كما أنه وضع أهم مبادىء مقابلة الأعداد للإحداثيات، أعنى تقابل مستقيم ما لأى عدد مهما تكن طريقة الحصول على ذلك العدد: فالعدد **أ** يقابله مستقيم وكذلك العدد **أ + ب** أو العدد **أ × ب** أو العدد $\sqrt{٢}$ الخ.. وهذا هو بداية الرياضة الحديثة.

يمكننا الآن أن نشير فى مثال محدد إلى موقف الهندسة التحليلية التى هى ثمرة التخلص من الحدس الهندسى (الأشكال المكانية) بحيث يصبح النظر قاصرا على رموز الجبر دون حاجة إلى الرجوع إلى الهندسة وبراهينها فى حل مسائل التحليل.

	أ س	ص ب
س	١	١
ص	٢	٣
	ج	د

فالمعادلة $(س + ص)^{٢} = س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}$.

يقتضى حلها فى الهندسة التقليدية أن يرسم الشكل الرباعى **أ ب ج د** الذى يضم الأشكال الرباعية :

$$١ + ٢ + ٢ + ٣$$

أما فى الهندسة التحليلية فلا ننظر فى أشكال مربعة ولا نتجاوز النظر فى مجرد مستقيمات نرمز إليها على الترتيب:

$$س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}$$

وهذه المستقيمات تمثلها عندنا أعداد فحسب وتذكرنا «بالإمتداد» الديكارتى الذى جعل منه **ديكارت** جوهر العالم المادى أو الخارجى فى فلسفته .

إنه منذ الهندسة التحليلية أخذت الرياضيات تخطو إلى الأمام بخطى سريعة. قال **تزيتن** (Zeuthen) الرياضى ومؤرخ الرياضة : «إنه منذ **ديكارت** انتقلت الرياضة من مرحلة الحرفة الصغيرة إلى مرحلة الصناعة الكبيرة» وهو يقصد بذلك أن اكتشاف **ديكارت** فتحَ أمام الرياضيين كل وسائل التقدم السريع المطرد لأن الرياضة لم تعد حبيسة الأشكال الهندسية بعد أن تحولت إلى تحليل وانطلقت مع انطلاق الأعداد المختلفة الكثيرة التى لا تمثلها أشكال هندسية ما تعوق التفكير الرياضى وتحد من قدرته .

لقد خطا التحليل بعد **ديكارت** خطوات واسعة فنشأ حساب التكامل والتفاضل وتقدمت نظرية الدوال (Theory of Functions) طوال القرنين السابع عشر والثامن عشر. وكلها اكتشافات عظيمة الأهمية نسكتُ عنها هنا لأنها لا تهمنا من وجهة نظر نشأة النقد الباطنى فى التحليل ومسألة المناهج والأسس أو الأصول التى نقصد إليها هنا. ذلك لأن الانتباه إلى مثل هذه الموضوعات الأخيرة عند الرياضيين أنفسهم لم يظهر إلا فى أواسط القرن التاسع عشر، عندما أخذ الرياضيون يهتمون بالجانب المنهجى والمنطقى للحساب والتحليل. فهُمْ إلى ذلك الوقت كانوا يثقون كل الثقة ويركنون فى اطمئنان لا مزيد عليه إلى النتائج الباهرة التى توصلوا إليها بواسطة

التحليل فى الهندسة التحليلية وحساب التكامل والتفاضل ونظرية الدوال التى نمت كلها على مر الأيام وطبقوها هم أنفسهم بنجاح موفور فى مختلف ميادين العلم الطبيعى الجديد دون أن يكترثوا فى الوقت عينه أدنى اكتراث لنقدها وفحص أسسها التى تستند إليها وبالجملة لمناهجها.

وفى الواقع كان تقدم الرياضيات منذ القرن السابع عشر رهنا بتقدم الطبيعيات وخاضعا لحاجاتها إذ كانت الطبيعيات هى التى تملى على الرياضيين الحاجة إلى المزيد من الكشوف الرياضية، فقنع الرياضيون بإسهامهم فى حل مشاكل الطبيعيات وإشباع حاجاتها أولا بأول دون أن يشعروا بحاجتهم هم أنفسهم إلى نقد مناهجهم الرياضية وفحص أسس عملهم ومواجهة حاجات الرياضيات فى ذاتها مستقلة عن الطبيعيات. فكانت الرياضيات إلى ذلك العهد تتألف من قطع متناثرة لا وحدة بينها ولا يتبع فى نظرياتها المتباعدة نهجا موحدا حتى قال رياضى إنجليزى حديث هو **فيليب چوردين** (Philip Jourdain) فى بحث مسلسل وممتاز عن أسس الرياضة Foundation of Mathematics فى مجلة العلوم الرياضية ١٩٣٠ : «إنه إلى منتصف القرن التاسع عشر لم يكن علم أضعف منطقا من علم الرياضة». فلا عجب إذن إذا رأينا الفلاسفة الذين اهتموا

بالرياضة قبل ذلك الوقت قد ذهبوا مذاهب شتى فى طبيعتها وأصولها وطرقها، فجاءت نظرياتهم غير مقبولة وغامضة. وأحيانا ضد تقدم الرياضيات أيضا، وساعدت بذلك كله على إشاعة الغموض عند الكثيرين من الفلاسفة والرياضيين المحدثين الناظرين فى أسس الرياضة .

(١٦)

فى الوقت الذى نشأت فيه هندسات غير أقليدية فى أواسط القرن الماضى، نشطت أيضا معاول الهدم فى التحليل وكانت نظرية الدوال theory of Functions هى مركز ذلك النشاط ولذلك سنتخذها نقطة البداية لحركة النقد الداخلى فى التحليل كما اتخذنا من قبل المسلمة الخامسة عند **أقليدس**، بداية لحركة النقد الداخلى فى الهندسة .

لقد كانت فكرة «الاتصال الهندسى» Continuite Geometrique هى الجذر البعيد والمشترك بين الهندسة والتحليل، وفكرة «الاتصال الهندسى» هذه اصطلاح حديث عند الرياضيين، ولكنه يدل على شىء قديم فى الفكر الرياضى إذ يدل على الكم الذى سمى منذ **أرسطو** متصلا فى مقابل الكم المنفصل (العدد)، ولكن يجب الآن أن نفهم فقط من هذا الاصطلاح ذلك المستقيم الذى استبقاه **ديكارت** فى

هندسته التحليلية بعد أن استبعد الأشكال الهندسية الأخرى، وعلى وجه أدق يجب الآن أن نفهم من ذلك الاصطلاح عدم وجود أدنى فجوة أو انفصال (Discontinuite) فى تتابع قيم دالة من الدوال كما تتتابع نقط مستقيم ما دون فجوة بينها مما يستبقى دائما حدسا بخط متتابع النقط سواء أكان الخط مستقيما أم منحنيا. أعنى بالطبع يستبقى حدسا هندسيا ما.

ولقد رأينا كيف أن التصور الأكسيوماتيكى الحديث فى الهندسة قد تخلص من الحدس الهندسى أو المكانى (نقطة - خط - سطح) بأن أحاله إلى فكرة «الطوائف المنطقية» Classes logiques وما يتبع هذه الفكرة من إقامة علاقات منطقية فى صورة مسلمات (الفقرة ١٢)، أما التحليل فقد كان يعتمد كل الاعتماد أيضا على ذلك الحدث الهندسى للاتصال الذى استبقاه **ديكارت** فى هندسة التحليلية أو الجبرية كما وضحناه. فنظرية الدوال كلها إلى منتصف القرن الماضى، إنما كانت تعبر عن هذا الاتصال الهندسى وتستمد منه وجودها. ولفظ «دالة» Function من وضع الفيلسوف الرياضى **ليبنتز** وقصد به المنحنى Curve الهندسى الذى يعبر عن علاقات «متصلة» متتابعة بين كمّيْن متغيرين (Variables) **س** و **ص** يسميان بالإحداثيين Coorodinates كما يقال فى اصطلاح الرياضة. فلو

أخذنا مثلا عوضا عن **س** و **ص** شيئين محددين مثل حرارة الغاز والضغط، فإن العلاقة التى تنشأ من تغير أحدهما عند تغير الاخر ترسم خطا «منحنيا» هو «دالة» فى عرف الرياضة وهذه الدالة «متصلة» اتصال الخط المنحنى الهندسى بحيث أن الدالة تكون لها قيمة معينة فى كل نقطة من نقط المنحنى، وبعبارة أخرى هى تجتاز قيما عددية متتابعة لا فجوات فيها أي تُعتبر خطا هندسيا.

طبعا عدد التجارب عن الحرارة أو الضغط محصور ولكن الخط الداخلى الذى يربط بين التجارب المحصورة العدد يمثل أعدادا متتابعة واتصالا هندسيا لا فجوات فيه، وهذا هو معنى «الاتصال» الذى تقتصر الكتب الباحثة فى أسس الرياضة على ذكره بهذا الاسم فقط (Continum) أو بوصفه بأنه «الاتصال الهندسى» Geometri-cal Continuity (أو حتى حدس الاتصال أو الحدس المكانى أو الهندسى).

ولم يحدث أن رياضيا قبل أواسط القرن الماضى ارتاب فى قيمة هذا الحدس الهندسى الذى تقوم عليه فكرة الدالة حتى بيّن آنئذ الرياضى الفرنسى **كوشى** Cauchy أن هناك دوالٍّ غير متصلة بل منفصلة على عكس شهادة الحدس الهندسى مما كانت تنبو عنه آنئذ العقلية الرياضية وأسماها «الدالة المنفصلة» (Fonction Discoti-

(nue فنشـأ عن اكتشـافه هذا أن تعرّض الحدس الهندسى للاتصال، أعنى تعرض الاعتقاد ببداهته، إلى الزعزعة وعدم الثقة فيه أو الركون إليه فى علم التحليل. لأن الاتصال الذى كان خاصية الدالة ولبابها أصبح الآن شيئا غير ملازم لها بل هو عَرَضٌ قد يعرض لها أحيانا فقط ،إذ بمناسبة أية دالة يحدث دائما التساؤل : أهى متصلة أم منفصلة؟ وهكذا افتتح **كوشى** بداية الطريق إلى تحرير التحليل من الحدود الضيقة التى أسره فيها الحدس الهندسى للاتصال زمنا طويلا . فلم يلبث أن فـرّق بعـد ذلك أيضـا الرياضى الألمانى **فيرستراس** Weierstrass المعاصر **لكوشى،** بين فكرتى الاتصال و«التفاضل» (Differenciation) اللتين كانتا متلازمتين متماسكتين فى التفكير الرياضى إلى ذلك الوقت، وذلك عندما اكتشف دالة متصلة ولكنها لا تقبل التفاضل، من جهة أخرى نجح **ريمان** -Reim ann فى تكوين دالة «منفصلة» فى عدد لا ينتهى فى الانفصالات بين نقطتين ما ، ومع ذلك فإن تلك الدالة تقبل التكامل (Integration) على عكس ما يشهد به الحدس. مثل هذه الاكتشافات المتعاصرة وغيرها برهنت للرياضيين ضرورة نبذ الحدس الهندسى الذى تمثله فكرة الاتصال كأساس سليم للتحليل. وخلقت عندهم الحاجة إلى إعادة النظر فى جميع أفكارهم ومبادئهم وأنظارهم القائمة على وضاحة أو

حدسية الاتصال المكانى أو الهندسى، كما أنها حسمت فى ضرورة استقلال التحليل عن حدس الاتصال أعنى عن ذلك الخط الهندسى الذى استبقاه **ديكارت**، وجعلت التحليل يأخذ على عاتقه ولحسابه الخاص إعادة النظر فى كل مبادئه وأصوله ومناهجه، وكما قال الرياضى الألمانى إذ ذاك **لوجين دير شليه** (Lejeune Dirichelet) فى كلمة مشهورة تقتطفها المؤلفات المختلفة هى : «أصبح اتجاه التحليل أن يحل الأفكار (Idees) محل الحساب (Calcul) .

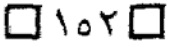
هنا نلمس تماما الحاجة الملحة عند رياضيى ذلك العصر إلى التخلى عن الحدس الهندسى برُمّته، أعنى حتى عن ذلك الخيط الرقيق الذى استبقاه **ديكارت** كمستقيم، فاستبقاه علم التحليل فى نظريته فى الدوال تحت عنوان الاتصال الهندسى. إن هذه الحاجة الملحة فى التخلص من حدس الاتصال إذا تمت - وستتم طبعا كما سنرى - فإنها تذكرنا بما لحق الهندسة ذاتها من تخلص من الأشكال الهندسية ومن التجائها آخر الأمر إلى عناصر منطقية صرفة كفكرة الطوائف لمنطقة Classes والعلاقات التى تقوم بينها مما سبقت الإشارة إليه (فقرة ١٢) وهذا هو بالضبط الطريق الذى ينتظر التحليل أيضا منذ ثورته على حدس الاتصال، ولكن طريق التحليل أطول وأشق كما سنرى.

فلنعد إلى كلمة **ديرشليه**، إن مغزاها هو أن علماء التحليل فى مرحلة تنقية علمهم من حدس الاتصال إنما ولوا وجوههم شطر الأسس والأصول التى يقوم عليها علمهم ناقدين وفاحصين، على عكس من سبقهم من علماء التحليل الذين لم ينتبهوا إلى هذه الناحية بل اتجهوا دائما الاتجاه الآخر والطبيعى، أعنى ناحية تنمية علمهم بالاكتشافات وإمداده بأنواع من الحساب جديدة لينهض بتبعاته حيال تقدم العلوم الطبيعية. وذلك الاتجاه الجديد النقدى الفاحص للأسس والمبادىء أمد الرياضة القائمة فعلا بأفكار جديدة لأسسها على خلاف الاتجاه الآخر الذى يمدها بالمزيد من أنواع الحساب. وهذا هو مغزى عبارة **ديرشليه** التى سنتوسع فيما يلى فى تفصيلها وفهمها .

(١٧)

إن الاتجاه الجديد الذى عبر عنه **ديرشليه** أحسن تعبير، أصبح مفروضا أو محتوما على الرياضيين منذ امتداد فكرة الدالة إلى ميدان العدد التخيلى Imaginary number أى المركب Comeplex .

لقد قيل إن **كوشى** Cauchy كان يستمد كل قوته الرياضية مما كان يخيف غيره من الرياضيين أعنى من الأعداد التخيلية أو المركبة. والواقع أن إحدى مفاخره فى الرياضة أنه وسّع من أفق نظرية



الدوال بأن وضع دالة أحد إحداثييها عددا تخيليا وأسماها الدالة التحليلية Fonction Analytique .

لقد كان العدد التخيلي معروفا من قبله، فقد أسماه **ديكارت** بهذا الاسم كما أسماه **ليبنتز** بالكم المستحيل Quantite Impossible ويسمى أيضا العدد المركب لأنه يشتمل على عددين حقيقيين (Reels) وأبسط الأعداد التخيلية هو جذر المعادلة .

$$س^{٢} = - ١$$

وإلى منتصف القرن التاسع عشر كان الرياضيون ينظرون نظرة استغراب إلى مثل هذا العدد الذى يشير إلى وجود كمّ متناقض مثل $\sqrt{-١}$ ولكن منذ أن أدخل **كوشى** علامة (^{1}) كرمز للعدد التخيلى $\sqrt{-١}$ (والرمز هو الحرف الأول من اسم العدد باللغة الفرنسية، ويستبدل فى اللغة العربية بالحرف الأول من اسم اللفظ المقابل له أعنى بالحرف **ت**) انساق **كوشى** بضرورة المحافظة على القواعد الجبرية إلى إدخال الأعداد المركبة التى من نوع :

$$أ + ب ت$$

حيث **أ** و **ب** عددان حقيقيان أيا كانا. ثم عمد إلى استعمال مثل هذا الكم المستهجن معند الحدس كواحد من المتغيرين Variables أو الإحداثيين فى الدالة فتكونت بذلك «الدالة التحليلية» التى سخر منها

الرياضيون بادىء ذى بدء وتوقعوا عدم فائدتها، ولكنها ما لبثت أن أثبتت قيمتها فى العلوم الطبيعية كما أمدت علم التحليل بنظرية أوضح مما لو كان قد ظل قاصرا على الأعداد الحقيقية والأعداد الصماء (Irrational) فحسب، حتى أن رياضيا فرنسيا معاصرا درس زمنا فى جامعة القاهرة هو **هادامار** Hadamard يقول فى مقال له فى دائرة المعارف الفرنسية الجديدة التى ظهرت بعض أجزائها قبيل الحرب الثانية «إن أقرب بُعد بين واقعتين فى العالم الحقيقى غالبا ما يمر بعالم العدد المركب». ونحن دون أن نتوقف أكثر من هذا عند الكلام عن الدوال التحليلية التى لها الآن مكانة أولى فى التحليل المعاصر يمكننا أن نلمح لماذا انساق الرياضيون بالطبيعة إلى النظر فى الأسس العددية أو الحسابية للتحليل بدلا من الأسس الهندسية التى يمثلها حدس الاتصال . وكما يقول **برنشفج** Brvunschvicg فى كتابه القيم **«مراحل الفلسفة الرياضية»** : إن القرن التاسع عشر قرن الأعداد التخيلية، إنما جدّد التحليل باستعماله لتلك الأعداد، وذلك التجديد ليس فقط هو إضافة عنصر جديد (عنصر العدد التخيلى) وإنما هو تجديد لحق الأسس والأصول أى لحق نقطة البداية فى التحليل». والتجديد الذى لحق الأسس والأصول والذى يشير إليه **برنشفج** إنما هو امتداد وتعميم لفكرة

العدد وإحلال للعدد محل فكرة الاتصال الهندسى كأساس يقوم عليه التحليل كله من الآن فصاعدا. وهكذا على حد تعبير مشهور للرياضى **فيليكس كلاين** Felix Klien وصف به حركة مماثلة فى ألمانيا قام بها الرياضيان **فيرستراس** Weierstrass **وكرونكر** Kro-necker وصارت العبارة عنوانا معبرا عن تلك الحركة التى أحلّت العدد محل الاتصال الهندسى في كل الكتب التى تتحدث عن تلك المرحلة فى تاريخ الرياضة : «أصبح التحليل «متحسّباً» (L'Analyse S'est arithmetisee)، وتلك كلمة وضعناها عنوانا لهذا الفصل ولكنها لا تستقيم تماما فى اللغة العربية مع أنها ضرورية لكى نبقى على وحدة الاصطلاح فى اللغات المختلفة، ثم لكي نفهم كيف أن التحليل الذى كان معتمدا على الحدس الهندسى للاتصال تخلى عنه واستعاض عنه بالحساب العددى المعروف، يستمد منه جذوره البعيدة ويرد إلى أعداده الصحيحة (Entiers - Integers) ودون إخلال بقواعد ذلك العدد التخيلى المستهجن، وواضح أن ذلك الارتداد إلى الحساب كفيل بطرد كل حدس هندسى من علم التحليل وبإكسابه أيضا وضوحا ونقاء ويقينا.

يقول الفيلسوف **برنشفج** فى كتابه «مراحل الفلسفة الرياضية» : إن علم الرياضة باتخاذه فكرة العدد الصحيح الإيجابى أساسا له

يستطيع أن يدعى بحق ،أنه طرد من العلم الرياضى كل غموض وشك». تلك هي وثيقة ميلاد المذهب الحسابى (Doctrine Arithmeti-sante) المشهور فى تاريخ الرياضة أثناء الربع الثالث من القرن الماضى والذى كانت رسالته رد التحليل إلى الأعداد، وتأسيسه على علم الحساب المعروف، ليكتسب التحليل يقينا مستمدا من يقين الأعداد ومبتعدا بذلك كله عن حدس الاتصال الهندسى الذى استبقاه ديكارت ثم تحطم شيئا فشيئا كأساس سليم وثيق للتحليل كما رأينا.

(١٨)

لقد تكلمت إلى الآن عن نشأة التحليل وارتباطه بالهندسة حتي منتصف القرن التاسع عشر، ثم عن حركة النقد الباطنى التي بدأت فى نظرية الدوال وحطمت العنصر الهندسى الكامن فى أعماق التحليل متمثلا فى حدس الاتصال، وارتدت بالرياضيين من النظر فى أهداف الرياضة وتنميتها إلى النظر فقط فى أصولها وأسسها لتنقيتها من روابطها الهندسية. ثم تكلمت عما تمخضت عنه هذه الحركة النقدية الباطنة من «تحسيب التحليل» أي إقامته على نظرية الأعداد وهذا هو الموضوع الذي نرى الآن أن نتوسع فى فهمه بعض الشيء لأنه يتصل مباشرة بمسألة أسس الرياضة ومنهجها .

هذا الاتجاه نحو تأسيس الرياضيات على الأعداد الصحيحة المعروفة إنما ظهر ونما فى فرنسا وألمانيا معا وتبعهما فيه رياضيّو البلاد الأخرى، ولقد عبر عنه الرياضى الفرنسى **جول تانري** Jules Tannery فى كتابه «نظرية الدوال ذوات المتغير الواحد» عام ١٨٨٦ بقوله : «يمكن تكوين التحليل كله على أساس فكرة العدد الصحيح الإيجابى وفكرة جمع الأعداد الصحيحة، وليس هناك ما يدعو إلى الالتجاء إلى أية مسلمة أخرى أو إلى أي مدد من التجربة [= الحدس الهندسى] وفكرة اللامتناهى L'infini التى يجب أن لا تظل من الآن فصاعدا سرا معميا فى الرياضة ترد إلى ما يأتى : بعد كل عدد صحيح يوجد عدد صحيح آخر»...

هكذا يرى هذا الرياضى أن التحليل أو قل الرياضة كلها إنما ترد إلى مسلمات الحساب وحده وهى العدد وعملية الجمع دون حاجة إلى مسلمات أخرى كأسس للتحليل. كما يثير بنوع خاص مشكلة نوع محدد من الأعداد برز بحدة فى ذلك الوقت هو الأعداد اللامتناهية L'infini فذهب للدهشة الشديدة إلى أنها لم تعد لغزا لأنها ترد إلى نظرية حساب الأعداد الصحيحة نفسها .

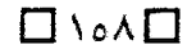
وهكذا نرى أنه عندما يعتنق رياضىٌ ما ذلك الاتجاه فى تحسيب التحليل تنشأ عنده بالضرورة المسألة الشائكة، وهى كيف يمكن

للأعداد الأخرى غير الصحيحة المستعملة فى التحليل كالأعداد السالبة والأعداد الصماء والأعداد التخيلية والأعداد اللامتناهية وغيرها أن ترد إلى الأعداد الصحيحة الإيجابية؟

لقد استنفدت هذه المسألة مجهودات ضخمة. وأثارت نظريات إضافية جديدة معقدة وتعريفات دقيقة للتصورات التحليلية الأساسية كالاتصال Continuum والدالة Fonction والحد Limit واللامتناهى L'infini وغيرها. وافتتح البحث فى هذه المشاكل كلها فى آن واحد **فيراستراس** فى جامعة برلين **وميراى** Meray فى جامعة ديجون بفرنسا. وهما بطلا المذهب الحسابى وعنهما أخذ رياضيو عصرهما.

لقد كان هذان المؤلفان يجهلان المنهج الأكسيوماتيكى الذى بعثه إذ ذاك معاصرهما **موريتز باش** (وقد تكلمنا عنه سابقا بمناسبة الهندسة) فلجأ المؤلفان المذكوران إلى ما سمى فى ذلك الوقت بالمنهج التكوينى Methode Genetique وتبعهما فى ذلك أعلام عصرهما فى الرياضة أمثال **ديدكند** Dedekind **وكرونكر** فى ألمانيا **ومولك** Molk **وجول تانرى** Tannery فى فرنسا .

والمبدأ الذى يقوم عليه المنهج التكوينى أو التوليدى هو كما يعرفه **جول تانري** على النحو الآتى «إن فكرة العدد تتكون بواسطة تعميمات متتابعة. والقضايا الخاصة بالعمليات الأربع الأساسية



مطبقة على الأعداد الصحيحة تكون موضوع أول فصول الرياضة أى الحساب. ثم ندخل بعد ذلك الدوال التى يمكن أن ينظر إليها كزوج Couple من الأعداد الصحيحة، فنطبق على هذه الأعداد الجديدة تعريفات تلك المعادلات والخواص الأساسية التى يتعرض إليها الحساب وفى بداية الجبر ندخل فكرة جديدة هى فكرة الأعداد النسبية Nombres Ralatifs أى الأعداد التى تسبقها دائما علامة (+) وعلامة (-) وهنا أيضا نطبق على هذه الأعداد الجديدة تلك التعريفات والخواص الأساسية السالفة..» وهكذا يستمر **تانرى** فى إدخال الأعداد المختلفة شيئا فشيئا كالأعداد الكسرية والصماء والدائرة والتخيلية واللامتناهية وغيرها مع الاحتفاظ ببقاء العمليات وتعريفاتها. ثم يختتم كلامه كما يأتى : «إن الأمر الهام هو أن تتكون الرياضيات شيئا فشيئا بحيث نتجنب فى كل مراحل تكوينها على أساس العدد وحده أىّ التجاء إلى الحدس التجريبى (Intuition em-pirique) وعندما ننهج هذا النهج فإن التعريفات المتتابعة للأعداد والعمليات تكون مجردة وصورية لأنه لا حدس هندسياً فيها...» .

طبعا لا يتسع المقام هنا لاستعراض كل خطوة من خطوات المذهب الحسابى فى ضوء ذلك البرنامج الحافل الذى تحدث عنه **جول تانرى**. ولكن يجب مع ذلك أن نعطى هنا على سبيل التمثيل

مجرد إحساس عن كيف أنه استنادا إلى الخطة التكوينية التى ذكرناها عن **تانرى** يمكن رد الأعداد التخيلية بالذات - التى أثارت مسألة تحسيب الرياضة - إلى الأعداد الصحيحة .

يقول **ميراى** Meray الذى له الفضل فى افتتاح هذه الحركة: «إذا كانت بعض الرسوم الهندسية تمدنا لهذه المقادير التخيلية برموز مناسبة، فإنه لا ينتج عن ذلك أنه توجد علاقة ما بين تلك الرسوم والأعداد التخيلية أكثر مما توجد علاقة بين ظاهرة طبيعية ما والمنحنى الذى يمدنا بصورة بصرية ترمز إليها. وليس هناك ما يدعو إلى بذل مجهود ضائع فى النفاذ إلى معنى الرمز $\sqrt{-1}$ الذي لا معنى له فى الواقع لأن الكم السلبى لا يمكن أن يكون له جذر تربيعى» .

فالكم المرموز له بعلامة $\sqrt{-1}$ ليس كما قلنا إلا تأليفا من عددين حقيقيين **(أ ، ب)** مرتبين بهذا الترتيب نتفق بالاصطلاح على أن نُجرى عليهما القواعد المعروفة فى الحساب العادى والتى تثبت لهما خواص الاشتراك (Association) والتبادل (Commutation) والتوزيع Distribution) وغير ذلك وهنا نترك **ميراى** واستعراضه الرياضى البحث ونلجأ إلى الفيلسوف المنطقى **لويس كوتوراه** Cou-turat الذى أعطى تخطيطا مبسطا لهذه النظرية فى كتابه المسمى

«اللامتناهى الرياضى» L'infini Mathematique على الوجه الآتى :

١- نسمى عددا تخيليا، المجموعة المكونة من عددين حقيقيين مرتبين ترتيبا معينا. فليكن العددان الحقيقيان **أ** و **ب** فتكتب مؤقتا العدد التخيلى على الصورة الآتية :

$$(\text{أ} ، \text{ب})$$

٢- تعريف المساواة : العددان التخيليان يتساويان عندما تكون الحدود المتناظرة متساوية. وعلى هذا فإن المعادلة:

$$(\text{أ} ، \text{ب}) = (\text{أ}^{١} ، \text{ب}^{١})$$

إنما تعنى المعادلتين :

$$\text{أ} = \text{أ}^{١} \quad \text{و} \quad \text{ب} = \text{ب}^{١}$$

٣- تعريف الجمع

$$(\text{أ} ، \text{ب}) + (\text{أ}^{١} ، \text{ب}^{١}) = \text{أ} + \text{أ}^{١} ، \text{ب} + \text{ب}^{١}$$

٤- تعريف الطرح

$$(\text{أ} ، \text{ب}) - (\text{أ}^{١} ، \text{ب}^{١}) = \text{أ} - \text{أ}^{١} ، \text{ب} - \text{ب}^{١}$$

ونرى من هذا فى نفس الوقت أنه لكى يتساوى عددان تخيليان يجب أن يكون الفرق بينهما صفرا. فإذا كان

$$\text{أ} - \text{أ}^{١} = ٠ \quad \text{و} \quad \text{ب} - \text{ب}^{١} = ٠$$

فإذن $$(\text{أ} - \text{أ}^{١} ، \text{ب} - \text{ب}^{١}) = (٠ ، ٠)$$

٥- نظرية

(أ ، ب) × ن = (أ ن ، ب ن)

حيث **ن** عدد صحيح ما .

٦- تعريف الضرب : حاصل ضرب عددين تخيليين هو العدد الذى نحصل عليه بتأليف حدودهما وفقا للصيغة الآتية التى هى قاعدة نسلم بها هنا تسليما .

(أ ، ب) × (أ١ ، ب١) = (أأ١ − ب ب١ ، أب١ + ب أ١)

لنقف قليلا عند هذه القاعدة السادسة الخاصة بالضرب وعند القاعدتين التاليتين (٧ و ٨) لأنها تمدنا بما يميز المقادير التخيلية .

إن حاصل ضرب عددين تخيلين لا يمكن أن يكون صفرا إلا إذا كان أحد العوامل أو كلها صفرا .

فلكى يكون لدينا

أأ١ − ب ب١ = ٠ و أب١ + ب أ١ = ٠

يجب أن يكون

أ = ب = ٠ و أ١ = ب١ = ٠

حينئذ تكون الصيغة العامة للضرب

(٠ − ٠ ، ٠ + ٠)

٧- حالة خاصة لما تقدم هى إذا كان ب١ = ٠ فإن الصيغة العامة

للضرب تكون

(أ ، ب) × (أ١ ، ٠) = (أأ١ . ب أ١)

وهذه النتيجة هـى بعينها كما لو كان المضروب فيه عددا حقيقيا كما فى القاعدة الخامسة .

(أ ، ب) × أ١ =(أأ١ ، ب أ١)

وإذن فـمن الطبـيـعى أن نعـتبـر العـدد التـخيلى الذى يكون حـده الثانى صفرا، هو بعينه العدد الحقيقى الذى يتكون منه حده الأول إذ هو يلعب نفس الدور فى حالة الضرب.

أمـا إذا اسـتـعـملنا فى الصـيـغـة (رقم ٧) السـالفـة أ١ = ١ مع استبقاء الصفر كقيمة ب١ فسنحصل على

(أ ، ب) × (١ ، ٠) = أ . ب

وهـذا يدل على أن العـدد التـخـيلى (١ ، ٠) هو نموذج الضـرب للأعداد التخيلية ويختفى كعامل من عوامل الضرب فى حالة الضرب. ويمكن من هذه الجـهة تشبيهه بالعدد الحقيقى + ١ فى حالة الضرب المألوف .

٨- وعلى عكس ذلك يكون العـدد التـخـيلى (٠ ، ١) عـامـلا لا يختفى فى حالة الضرب ولا يمكن تجاهله لأن

(أ ، ب) × (٠ ، ١) = (– ب ، أ)

وبصفة خاصة

(٠ ، ١) × (٠ ، ١) = (- ١ ، ٠) = - ١

وعلى هذا فإن العدد التخيلى (٠ ، ١) مضروبا فى نفسه أى ما يسمى تربيع العدد التخيلى هو عدد يساوى العدد الحقيقى - ١ .

وهذه هى النقطة الهامة التى نريد أن نصل إليها لنبين أن $\sqrt{-1}$ هو العدد المركب (٠ ، ١)

لنلاحظ أيضا ملاحظة هامة وهى أن العدد التخيلى (أ ، ب) يمكن أن يعتبر حاصل جمع لعدد صورته (أ، ٠) و (٠ ، ب) بمعنى أن يجمع بين عدد حقيقى وعدد تخيلى صرف. من جهة أخرى كل عدد تخيلى صرف يساوى لحاصل ضرب عدد حقيقى بعدد تخيلى هو

(٠ ، ١) (ب ، ٠) × (٠ ، ١) = (٠ ، ب)

يمكن إذن أن ترد كل الأعداد التخيلية إلى الوحدة التخيلية (٠ ، ١) التى نرمز إليها تبسيطا للكتابة بالحرف ت فنكتب الأعداد التخيلية كما يأتى :

أ + ب ت (وبالفرنسية a + b L)

وهو عدد ثنائي نطبق عليه كل القواعد الجبرية إذا اتفقنا على مراعاة الصيغة المشار إليها بالنجمة (*) فى الفقرة الثامنة فنحصل

منها على

$$ت \times ت = ت^2 = -1$$

فبفضل هذه الصيغة الأخيرة نجد أن الرمز ت يمثل الجذر التربيعي للعدد – ١وهو العدد الذى حل محل العدد التخيلى (–١، ٠) وتأخذ (أ ، ب) عمليا الصورة أ $+\sqrt{-1}$ب أو أ + ب ت .

ولكن ما يهمنا دائما هو أن ندرك أن العدد التخيلى أصبح على هذا النحو عددا حقيقيا تنطبق عليه كل قواعد الجبر العادى .

ويتضح من هذا المثال أنه لكى يعمم العدد الصحيح ويمتد إلى إذابة العدد التخيلى فيه يوضع الرمز (أ ، ب) الذى تألف من عددين حقيين. ثم نعرف بعد ذلك المساواة والجمع والطرح والضرب. وبعد هذا يمكن بيان أن نظريات الحساب العادى تظل مستقيمة فى حساب الأعداد التخيلية. وعلى هذا النحو نفسه تمتد فكرة العدد الصحيح إلى الأعداد الأخرى الكسرية والنسبية والصماء والدائرة الخ .

(١٩)

من الأعداد التى يجب أن نتوقف عندها الأعداد الصماء ومشكلة ردها إلى الأعداد الصحيحة. لقد اصطلح العرب على أن يضعوا فى مقابل العدد الذى سموه «المنطوق» وهو الذى ينتهى فى جذرها

التربيعى ويقبل القسمة بأعداد منتهية. العدد «الأصم» الذى لا ينتهى جذره التربيعى ولا قسمته ومن ذلك أيضا العدد الدائر .

ليس من الصعب إذن فى حالة الأعداد الصماء أن ندرك لماذا اصطدم تعميم العدد الصحيح بصعوبات جمة ناجمة عن طبيعة العدد الأصم ذاتها إذ هو عدد كما وضح لنا الآن لا يمكن تحديده أو تعريفه بعدد ينتهى من الأعداد المنطوقة بل يحتاج دائما إلى سلسلة لا تنتهى من هذه الأعداد ولقد لفتت هذه الصعوبات أنظار الرياضيين حتى فى العصر القديم فحاولوا رد الأعداد الصماء إلى الأعداد الصماء إلى الأعداد الصحيحة لكى يعطى الرياضيات ما هى جديرة به من المعقولية والوضوح. فهم إذن حاولوا «تحسيب» الرياضة (Arithmetisation of Math.) أيضا قبل ظهور هذه الحركة - التى وصفناها - فى منتصف القرن الماضى .

لقد كان الفيثاغوريون أول من لاحظوا أن النسب بين بعض الأبعاد وخاصة بين الوتر وأضلع المربع نسب صماء (انظر فقرة ٦) أى لا تقاس بالأعداد الصحيحة. فذكر لنا أفلاطون أن **تيودور القورينائى** أثبت أن $\sqrt{٣}$ و $\sqrt{٥}$ و $\sqrt{٦}$ الخ أعداد صماء، كما أن صديقه **طيطاوس** نظر فى العدد الأصم بصفة عامة . وبدلا من أن يمتد القدماء أو يحاولوا أن يمتدوا بالعدد المنطوق إلى مجال

العدد الأصم على وجه علمي أو بناء على نظرة علمية خلصوا ببساطة إلى عجز علم العدد أو الحساب وفضلوا عليه علم الأبعاد أى الهندسة لكى يقيموا هذه الأخيرة على مسلمات وتعريفات. ومع ذلك فإن اكتشافهم للأعداد الصماء جعلهم يفكرون منذ بداية الرياضة عند اليونان فى تحسيب الرياضة على النحو التالى :

لقد ميزوا علم الحساب الذى موضوعه الأعداد الطبيعية عن اللوجستيقا (Logistique) الذى جعلوا موضوعه جداول عملية تحوى نتائج عمليات حسابية يستخدمها المساح والمهندس والفلكى وغيرهم. وفي هذه الجداول حاولا أن يتجنبوا الأعداد الصماء وذلك بإثبات علاقات أو نسب بين أعداد طبيعية فحسب. فهى جداول تعطى مثلا أقرب سلسلتين من الأعداد الطبيعية لعدد أصم معين أحداهما أقرب سلسلة إليه بالنقص وأخراهما أقرب سلسلة إليه بالزيادة. فيقع العدد الأصم بينهما. وتلك هي البذرة الأولى فكرة تعميم العدد كما يلاحظ الرياضى **برنجشهيم** Pringsheim .

وفى العصر الحديث أدى كل من جبر **فيت** وهندسة **ديكارت** إلى تعميم العدد أيضا كما سبق أن رأينا من جهة أنهما مثلا كل بعد هندسى بعدد ما، وتعوّد الرياضيون على أثرهما أن يوحدوا بين العدد والبعد. وقد رسخت بالاستعمال هذه العادة فى العلم الحديث

بعد اكتشاب حساب التكامل والتفاضل بحيث أصبح الهندسيون أنفسهم يتأملون الأعداد مباشرة ويستنبطون من النظر فيها وحدها خصائص الأشكال الهندسية (وهى ليست أعداد) . فمثلا الهندسى لوجاندر Legendre يبرهن عام ١٨٢٣ القضايا الخاصة بالماثلة أو المشابهة (Similitude) فى الهندسة وذلك بالنظر فى الأعداد التى تمثل أبعادا وبتطبيق نظريات الحساب والجبر على تلك الأعداد. وكان هذا السلوك من جانب الرياضيين يتضمن فى نفسه مشكلة ظلت زمنا طويلا غير ملحوظة عندهم، وهى أنهم باعتمادهم على الأعداد دائما إنما كانوا يعتدون على «الاتصال الهندسى» ويتجاهلونه تماما بل ويعملون على نقيض ما كان يشهد به الحدس الهندسى عندهم.

وإلى منتصف القرن التاسع عشر توهموا أنهم إنما تغلبوا على تلك المشكلة بافتراضهم أنه ليس فقط لكل بعد عدد يقابله، بل بافتراضهم أيضا الفرض العكسى وهو أن لكل رمز عددى يحصلون عليه بتأليف اللوغارتمات المثلة لأعداد مختلفة الأنواع (النسبية أو التخيلية أو الصماء الخ...) يوجد بُعد يقابله بالضرورة أيضا. والرياضيون الذين تشككوا فى الوضوح الهندسى لذلك الفرض لما رأوا استحالة الإنتقال من الأعداد إلى الأبعاد انتقالا منطقيا صرفا أو بصفة يقينية وثيقة لجأوا إلى وضع مسلمة صريحة فى صلب

الرياضة دون برهان عليه باعتبارها مسلمة (لا نظرية) تسمى مسلمة **كـانتـور** و **ديدكند** (Pastulat de Cantor - Dedekind) تبـرر هذا الانتقال وتضع ضرورته وضعا. كما أنهم اجتهدوا من جهة أخرى فى تقصى أنواع الأعداد وفى تكوين سلسلة منها محكمة الحلقات فى تسلسلها ابتداء من الأعداد الصحيحة لكى يزيدوا علمهم التحليلى يقينا ونقاء من الأبعاد الهندسية. وهذا ما أدى إلى التعمق فى فكرة الأعداد الصماء التى نحن بصددها هنا لكى يربطوا إليها الأبعاد الهندسية بواسطة المسلمة السابقة الذكر. ذلك لأن العدد الأصم الذى لا يتناهى كالدائر مثلا بدا لهم أنه هو الذى يمثل الأبعاد الهندسية التى يشهد بها الحدس لأن فى العدد الأصم عملية لا تنتهى أى مستمرة أو متصلة وكأنها بذلك تمثل ذلك الاتصال (Con-tinuum) المعبر عن الهندسة .

ولقد كانت نتيجة ذلك التعمق فى الكشف عن طبيعة الأعداد الصماء أنهم رأوا فيها إحدى نظريتين : الأولى نظرية الحد (Limit) الذى تقف عنده السلسلة اللامتناهية لأعداد صماء (نظرية **ميراى - فيرستراس- كانتور** Cantor) والثانية نظرية القطع (Coupure أو Cut) بين مجموعتين لا متناهيتين (Deux ensembles infinis) من الأعداد الصماء (نظرية **ديدكند - كرونكر - تانرى**) فأصبحت فكرتا الحد

والقطع منذ ذلك الوقت، الجسرين اللذين يعبر أحدهما أو الآخر كل رياضى للانتقال من الأعداد المنطوقة أو الطبيعة إلى الأعداد الصماء الممثلة للأبعاد الهندسية بالمسلمة المذكورة، وبذلك ربطت الهندسة بالأعداد نهائيا عن طريق الأعداد الصماء التى ترد بإحدى الفكرتين الحد أو القطع - إلى الأعداد المنطوقة .

ما هي نظرية الحد أولا ؟

لقد أدخل الرياضى **كوشى** Cauchy قبل ذلك بسنوات فكرة «الحد» ليدل على ما يأتى : عندما تقترب القيم المتعاقبة لمتغير ما اقترابا شديدا من قيمة ثابتة معطاة مقدما بحيث لا تفترق عن هذه القيمة (الثابتة) إلا بأقل ما تشاء من القيم فإن هذه الأخيرة (الثابتة) تسمى الحد لكل تلك القيم والعدد الأصم عند **كوشى** هو حد بهذا المعنى فهو حد للكسور المختلفة التى تمدنا بقيم تقترب شيئا فشيئا من هذا الحد .

لكن **ميراى** Meray هو الذى جاء بالتعبير الرياضى للعدد الأصم على أساس فكرة الحد. فهو يطلق لفظ المتغير Variante على سلسلة لا متناهية من الأعداد المنطوقة "1 " "2 " "3 " ... "n" . فإذا كانت هذه المتوالية عند n هى أقل من عدد منطوق ما، هو $\overset{n}{ع}$ مهما يكن هذا الأخير صغيرا فإننا نقول إن ذلك المتغير «متجمع» Convegrente

عند الحد ع وللتعبير عما سبق برموز الرياضة يكتب V للدلالة على المتغير المتجمع للمتوالية "1" "2" "3" ... "n" بحيث أنه إبتداء من n يكون:

$$V - \text{“}n < ع$$

هذا إذا كان للمتغير المتجمع حد.

ولكن إذا لم يكن له حد فيجب أن نضع له «حدا مثالثا» (Limite Ideale) نسميه الكم الأصم. فالعدد الأصم عند **ميراى** هو حد مثالى يتجمع فيه متغير ما. كما يمكن القول بأن التجمع لأى متغير إنما هو الميل نحو حد ما سواء أكان الحد حقيقيا أو مثاليا.

أما النظرية الأخرى التى تعتمد على فكرة القطع (Theory of cut) فيقول **ديدكند** إنه يمكن أن نقطع أو نفصل على أنحاء لا متناهية مجموعة ما من الأعداد المنطوقة إلى مجموعتين اثنتين **أ** و **ب** بحيث يكون كل عدد من المجموعة **أ** أقل من كل عدد من المجموعة **ب** ومثل هذا الفصل نسميه «قطعا» فى مجموعة الأعداد المنطوقة .

ولا يخلو هذا القطع من أحد أمرين : الأمر الأول هو أنه يوجد عدد ما سواء فى **أ** بحيث يكون أكبر أعداد هذه المجموعة أو فى **ب** بحيث يكون أصغر أعداد هذه المجموعة. فنجعل عندئذ القطع يقابل ذلك العدد الذى نحصل على تعريفه وتعيينه بواسطة المجموعتين **أ** و **ب** . وهذا بالطبع عدد منطوق لأننا لا نعرف بعد إلا هذا النوع من

العدد. والأمر الثانى هو أنه لا يوجد عدد ما سواء فى أ بحيث يكون أكبر أعدادها. أو فى ب بحيث يكون أصغر أعدادها. فنتفق عندئذ على أن نضع للقطع رمزا عدديا يقابله وفى هذه الحالة يكون الرمز معبرا عن عدد أصم. وبما أن تلك المقابلة تسمح للرموز التى نحصل عليها على ذلك الوجه بأن نقارنها فيما بينها وكذلك بأن نقارنها بالأعداد المنطوقة، فمن الطبيعى أن نقول بأن الرموز الجديدة تمثل أعدادا، كالشأن فى الأعداد المنطوقة نفسها. على كل حال يصبح العدد الأصم فى هذه النظرية مجرد اصطلاح على قطع، ورمز له تجرى عليه العمليات كلها.

ومهما يكن من أمر تفضيل الرياضيين لنظرية من النظريتين السابقتين على الأخرى فيما يختص بالعدد الأصم، فإن الأمر الهام من وجهة نظرنا فى هذه الدراسة المنصبة على أسس الرياضة هى أن «تعميم» فكرة العدد الحقيقى وامتدادها إلى جميع الأعداد كالتخيلية والصماء، أصبح أمرا واقعيا على أيدى رياضيّى الربع الثالث من القرن الماضى. فهؤلاء الرياضيون الذين تعرضوا لتحسيب التحليل، بينوا إمكان تركيب أو تأليف الأعداد كلها ابتداء من العدد الصحيح وحده والامتداد به. أعنى بيقينه. إلى كافة الأعداد. وبما أن أحداثيات الدوال تتضمن دوما خليطا من تلك الأعداد فيمكن القول

بأن التحليل أصبح من ذلك الوقت متحسبا (Arithmetise) ولا يحتاج إلى حدس الاتصال الهندسى.

فلنختتم كلامنا عن هذا المذهب الحسابى بكلمة **هادامار** -Hada mard أستاذ الرياضة بجامعة باريس والذى درّس بجامعة القاهرة أيضا وهى :

«إن الرياضة اليوم بدلا من كلمة **باسكال** القائلة : بأن ما تقبله الهندسة فهو مقبول عندنا فى الرياضة كلها. تحل محلها كلمة أخرى هى أن ما يقبله الحساب فهو مقبول رياضيا عندنا ... وإذا كان كل شيء فى الرياضة متولد اليوم أو مستخرج من فكرة العدد الصحيح فلْنُحيِّ مع **بوانكاريه** تحية وداع أخير فكرة الاتصال الهندسى التى كانت وحدها فيما مضى قادرة على مثل ذلك التولد والإخراج».

(٢٠)

لقد أضفى المذهب الحسابى على رياضيات ذلك العصر التي كانت مهلهلة، تسلسلا جميلا وتماسكا بديعا جامعا لفروعها ونظرياتها ابتداء من الأعداد الصحيحة وعملياتها التى تؤلف علم الحساب. فانتشر يقين هذه ووضوحها شيئا فشيئا إلى جميع أنواع الأعداد والنظريات التى تتناولها الرياضة وذلك على أساس المنهج

التكوينى أو التوليدى الذى استخرجها جميعا من الأعداد الصحيحة. مستبعدا بذلك كل حدس هندسى بحيث أصبحت الهندسة نفسها بمقتضاه نظرا فى أعداد وحسب. وقد احتاج ذلك كله إلى مزيد من نظريات تتفاوت تعقيدا كالتى شرحناها .

ولكن لم يكن المذهب الحسابى الكلمة الأخيرة والوحيدة فى هذا الإتجاه الذى يضفى على الأعداد كل هذا اليقين الرياضى. فهذا المذهب الذى اسْتَتَمَّ تكوينه فى غضون الربع الثالث من القرن الماضى، إنما لقى من خارجه ومن اهتمامات غريبة عنه توطيدا وتدعيما وذلك بظهور «نظرية المجاميع» (Theorie des Ensembles أو Theory of Sets) التى جاء بها الرياضى الألمانى **جورج كانتور** Georg Cantor ونشرها من ١٨٨٣ إلى ١٨٩٥ وتدعيم نظرية المجاميع للمذهب الحسابى من جهتين :

الأولى أن نظرية **جورج كانتور** أكدت نزعة الربع الثالث من القرن الماضى فى تأسيس الرياضيات كلها ومنها الهندسة على أساس الأعداد الطبيعية بحيث تشيد الرياضيات كلها على أساس علم الحساب المعروف. ذلك لأن نظرية المجاميع نظرية تعمقت الحساب نفسه، وكشفت عن نظريات جديدة ومعقدة أضفت عليه قدرة عظيمة على حل الكثير من أعْوص مشاكل الرياضيات العليا التى لم يكن لها

حل إلى ذلك الوقت .

أما الجهة **الثانية** فهى أن نظرية المجاميع وسّعت من أفق فكرة العدد ذاته عندما أضافت إلى سلسلة الأعداد الصحيحة المعروفة لدينا والتى أسمتها العدد المتناهى (Finite Number) سلاسل من الأعداد الجديدة تجىء بعد تلك السلسلة المنتهية واسمتها الأعداد العابرة أو المتجاوزة للمنتهى (Transinite Numbers) ونكتفى بأن نسميها الأعداد اللامتناهية الكبر أو «الأعداد اللامتناهية» فحسب. ولقد سلح هذا النوع الجديد من الأعداد علم الحساب بأجنحة ضخمة جعلته يحلق بعيدا فى سماء اللامتناهى الذى حيّر الفلاسفة والرياضيين منذ القدم. منذ **زينون الإيلى** Zenon تلميذ **بارمنيديس** رأس المدرسة السقراطية (سقراط وأفلاطون وأرسطو) حتى الربع الأخير من القرن الماضى. وهاتان الجهتان توكيد ولا ريب للمذهب الحسابى جاءه من واد بعيد عنه ومن اهتمامات مخالفة لاهتماماته. فنظرية المجاميع دعم للمذهب الحسابى ولو من خارجه لأنها أكدت أهمية الأعداد .

ونحن دون أن نتعرض لتاريخ فكرة اللامتناهى عبر القرون نقول فى اختصار أن الفارق بين تناولها طوال العصور وبين تناول **جورج كانتور** لها، هو الفارق بين الجدل الفلسفى الذى يحلل أفكارا غامضة

والمعالجة الرياضية التى تعالج أعدادا على أساس عمليات حسابية.
ولم يكن من الممكن أن تنضج فكرة اللامتناهى لتصاغ فى أعداد وعملياتها، إلا بعد أن نضج الفكر الرياضى فى القرن الماضى لتقبل الأعداد وحدها كأساس للرياضة وبعد أن نضجت فكرة الأعداد نفسها بأنواعها المختلفة عند الرياضيين.

لقد أقحم **زينون الإيلى** فى القديم فكرة اللامتناهى ليحتج على استحالة «الحركة» التى نادى بها **هرقليطس** بدلا من السكون أو الوجود الثابت الذى نادى به أستاذه **بارمينديس**. وخلاصته احتجاجه أن السهم مثلا الذى ينطلق من قوسه إلى هدف ما، لا يمكنه أن يفارق قوسه على حد زعمه، لأن عليه أن يقطع أولا نصف المسافة إلى الهدف وقبل ذلك نصف النصف، وقبل ذلك نصف النصف، النصف وهكذا يتراجع التقسيم إلى ما لا نهاية. ولا يمكن للسهم حينئذ أن يقطع ما لا ينتهى من الانقسامات . فالحركة باطلة والوجود ساكن ثابت كما قرر أستاذه **بارمنيدس** .

ولقد ناقش **أرسطو** موقف **زينون**، ليبيّن الزيف فيه فرأى أنه موقف خلط بين ما هو «بالقوة» (أو ما هو بالإمكان قابل للقسمة) وما هو قائم «بالفعل» فالتقسيم الذى لا ينتهى هو عملية ممكنة فقط. ولكن السهم لا يجتاز انقاسمات ممكنة وإنما يجتاز مسافة قائمة أو

موجودة بالفعل بين قوسه وهدفه ولذلك فالحركة قائمة .

ولم تحظ الفكرة التى أقحمها **زينون** فى الفكرين الفلسفى والرياضى، ما هى جديرة به تماما من عناية لصعوبتها فنجد فلاسفة العصر الحديث يتحدثون عن الله تعالي باعتباره كمالاً «لا ينتهى» كما نجد **نيوتن** يتحدث عن مكان وزمان غير منتهيين، كل ذلك دون تناول اللامتناهى الكبِر .. مباشرة. ولكن ربما كان **بولزانو** Bolzano فى القرن التاسع عشر، أول من ركز انتباهه على تمحيص هذه الفكرة تمحيصا رياضيا عندما وضع أمام كل عدد من سلسلة الأعداد الصحيحة (١، ٢، ٣...) وهى لا تتوقف بالطبع عند نهاية ما. عددا زوجيا من سلسلة الأعداد الزوجية المتضمنة فى السلسلة الأولى (٢، ٣، ٦...) وهى بالطبع نصف أعداد السلسة الأولى ولا تتوقف بالطبع عند نهاية كذلك مثل السلسلة الأولى. فاستنتج **بولزانو** من هاتين السلستين اللامنتهيتيْن المتقابلتين عددا بإزاء عدد. إن خاصية العدد اللامتناهى الكبر هى أن الكل يساوى جزءه على خلاف المألوف باعتبار أن سلسلة الأعداد الزوجية هى نصف الأعداد فى السلسلة الكاملة .

إن خصائص العدد اللامتناهى التى منها تلك الخاصية التى أشار إليها **بولزانو** إنما أصبحت واضحة فى نطاق المعالجة

الرياضية التامة للأعداد اللامتناهية عند **جورج كانتور** فى الربع الأخير من القرن الماضى. ونحن لكى نكون فكرة مبدئية عن هذه النظرية الجريئة التي اقتحمت أمنع الحصون الرياضية وأعنى حصون العدد اللامتناهى الكبر، والتى تعتبر بحق أبعد الاكتشافات الرياضية وأعجبها والتى أثارت منذ ظهورها وتثير إلى الآن الأبحاث والنقاش وقسمت الرياضيين إلى معسكرين متنابذين. نقول لكى نكون عنها فكرة مبدئية نكتفى بالإشارة إليها من خارجها فنقول إنها نظرية قسمت الأعداد إلى أعداد عادة أو أساسية Cardinal Numbers وإلى أعداد مرتبة Ordinal Numbers. ولكل قسم نظرياته وخصائصه المميزة والمخالفة. ثم قسمت بعد ذلك الأعداد إلى متناهية Finite N. وإلى لا متناهية Transfinite N. فدرست فى كل من هذين القسمين أعداده العاده وأعداد المرتبة. فتنوعت النظريات فى كل منهما كما تكشفت فروق شاسعة بين نوعى العدد المتناهى واللامتناهى حتى فى معنى أو قيمة العمليات الحسابية نفسها كالجمع والضرب والقسمة والجذور والقوى والدالة والحد الخ...

ولكى نتبين مغزى أو معنى هذا التنوع والاختلاف بين نوعى العدد فيما يتصل ببعض العمليات الحسابية المعروفة لدى الجميع والتى ذكرنا الآن أسماء بعضها، نقول إن **كانتور** يرمز بحرف الألف

العبرى لأصغر الأعداد المتناهية العادة وسنكتب بدلا عنه حرف أ .
بينما يرمز بحرف W اليونانى لأصغر الأعداد اللامتناهية المرتبة.

إن أصغر الأعداد اللامتناهية العادة المرموز له بحرف **أ** عدد يحصر جميع الأعداد المتناهية. بعبارة أخرى إذا اعتبرنا أن كل الأعداد المتناهية تؤلف «مجموعة» (Set, Ensemble) وهذه المجموعة لا يمكن بالطبع حصر أفرادها بالاستقراء لأنه مهما وصلنا إلى عدد صحيح فإنه يوجد بعده عدد آخر. فإن هذه المجموعة لكل الأعداد الصحيحة التى نرمز إليها بحرف **أ** هى أول الأعداد اللامتناهى وأصغرها جميعا .

لننظر الآن فى تطبيق بعض العمليات الحسابية المألوفة على هذا اللامتناهى العاد الأصغر، لنتبين عدم جدوى هذه العمليات المألوفة لدينا فى هذا الميدان الجديد ميدان اللامتناهى .

أ + أ = أ

أ + ن = أ

أ + أ = أ

أ × ن = أ

أ × أ = أ

أ ن = أ

الخ...

هذه نظرة عابرة من الخارج إلى نظرية المجاميع بالقدر الذى نفهم به عدم فاعلية العمليات الحسابية المألوفة فى مجال الأعداد اللامتناهية والتى تبين خاصية من خواص اللامتناهى سبق أن تنبه إليها **بولزانو**، وهى أن الكل يساوى جزءه وهذا واضح من المعادلات السابقة. هذا بالإضافة إلى أن ما ذكرناه عن هذه النظرية يكفى لكى نفهم بعض ما أثارته من ضجيج بين الرياضيين عند تعمقهم هذه النظرية فى كل فروعها واكتشافهم لنقائض Paradoxes فيها حَمِىَ الجدال حولها، وأسالت ولا تزال تسيل المداد وحركت أقلام الرياضيين والفلاسفة المنطقيين إلى الآن لتقويم ما اعوجّ من النظرية. وكل هذا يقودنا إلى صميم المسألة الأساسية التى نتتبعها دائما هنا وهى مناهج الرياضة وأسسها .

ففيما يختص بالنقائض التى تتضمنها النظرية نذكر على سبيل المثال التناقض الذى تنبه إليه الرياضى الإيطالى **بيورالى فورتى** Burali Forti وهو أول تناقض ظهر فى النظرية وكان ذلك عام ١٨٩٧.

فالنظرية التاسعة والأربعون فى الأعداد المرتبة اللامتناهية عند **كانتور** تقول : إن الأعداد المرتبة اللامتناهية يمكن أن ترتب ترتيبا تصاعديا بحيث أنه من بين كل عددين منهما أيا كانا، يوجد دائما

عدد أقل من الآخر وأن أكبر الأعداد المرتبة اللامتناهية هو آخر سلسلة تلك الأعداد .

فيقول **بيورالى فورتى** إذا أخذنا هذا العدد الأخير كطرف وحيد فى المقارنة فلابد أن يكون وفقا للنظرية نفسها - باعتباره عددا مرتبا لا متناهيا - أقل من عدد آخر لا نعلمه. وإذن فأكبر الأعداد المرتبة اللامتناهية ليس أكبر الأعداد المرتبة اللامتناهية . وهذا تناقض فى هذه النظرية ٤٩.

مثال آخر للتناقض ما كشفه **برتراند راسل** Bertrand Russell الفيلسوف المنطقى المعاصر فى نظرية من نظريات **كانتور** فى العدد العاد المتناهى التي تقول أن كل عدد منته باعتباره مجموعة (Set* أو Class) لا يشتمل على ذاته كجزء منها. فيقول **راسل** إنه يمكن بيان أن عدد الأعداد المتناهية كلها (أى مجموعة كل المجاميع العددية) هو فى آن واحد لا يشتمل ذاته ويشتمل ذاته أيضا كجزء من ذاته، وهذا تناقض . فهو لا يشتمل ذاته لأنه أكبرها وفقا للنظرية. ولكنه أيضا يشتمل على ذاته باعتباره مجموعة كغيره من المجاميع، أى إحدى المجاميع التى لا تشتمل على ذاتها. لتقريب هذا التناقض نقول : إذا جمعنا كل فهارس مكتبات العالم فى هذه الحجرة بحيث لا يبقى فهرس خارجها. فنحن لدينا جميع الفهارس (أى كل المجاميع Sets)

للمكتبات. الآن نضع فهرسا لكل الفهارس الموجودة بالحجرة. فهذا هو المجموعة لكل المجاميع. هذا الفهرس الكلى هو فى آن واحد فهرس لكل الفهارس وأيضا واحد من تلك الفهارس باعتباره فهرسا. بعبارة أخرى هو فى آن واحد لا يشتمل على ذاته كجزء لذاته وأيضا يشتمل على ذاته كأحد الفهارس ، وهذا تناقض.

إن آخر ما هنالك من نقائض أخرى تنبه إليها الرياضيون، وواضح أنه يترتب على تلك النقائض وجود خلل ما فى نظريات أو قضايا نظرية المجاميع. يجب إما إصلاحه وإما رفض النظرية الكانتورية برمتها إذا استعصى الإصلاح. وسواء أكان الموقف اللاحق إصلاحا أو رفضا لهذه النظرية فإن الأمر الثابت الأكيد أن المذهب الحسابى قد ظفر من هذه النظرية بتأييدها له بطريق غير مباشر بأن الأعداد الطبيعية هى حجر الزاوية فى تأسيس الرياضيات بما فيها الهندسة عند التحليليين .

(٢١)

تتبعنا إلى الآن خطوات تحسيب الرياضة والابتعاد بها نهائيا عن حدس الاتصال الهندسى. ونوهنا بما لنظرية **جورج كانتور** من فضل فى ترسيخ ألفة الرياضيين للأعداد دون الأشكال الهندسية رغم ما

ظهر من نقائض فى هذه النظرية .

وواضح أن الأبحاث فى أسس الرياضة لم تتوقف عند الكلمة الأخيرة للمذهب الحسابى القائل بأن الأعداد الطبيعية أو الصحيحة هى كل شىء فى الرياضة وإليها يرد كل شىء آخر فيها .

ففى السنوات الأخيرة من القرن الماضى تشعبت الأبحاث فى أسس الرياضة عند الرياضيين إلى تيارين. فأما أحدهما فقد ظل مغمضاً عينيه عن نظرية **جورج كانتور** وبدأ من الكلمة الأخيرة للمذهب الحسابى وهى أن الأعداد الصحيحة هى أساس كل شىء فى الرياضة فلم يشأ هذا التيار أن يتوقف عند هذه الأعداد كنقطة بدء يقينية للرياضة وإنما حاول أن يقيم اليقين الرياضى كله على أساس المنهج المعبَّد فى الرياضة منذ القدم، ألا وهو المنهج الأكسيوماتيكى. فبحث عن مسلمات لسلسة الأعداد تستمد السلسلة يقينها منها ومن ورائها أيضا الرياضيات بحذافيرها كما رتبها المذهب الحسابى وبالطبع فى مثل هذا البحث الذى أصبحت المسألة الملحة فيه هى مسألة يقين منطقى، يصبح للمنطق الصورى دور هام فى تكوين المسلمات كما لسنا هذا عند كلامنا عن مسلمات الهندسات .

أما التيار الرياضى الآخر فقد بدأ من نقائض **جورج كانتور**

وحاول علاجها أو على الأصح حاول تقويم النظرية نفسها بالطرق الأكسيوماتيكية أيضا واستعان كذلك بالمنطق الصورى. وإن كان هذا التيار جزئيا وموضوعيا فى داخل نظرية المجاميع نفسها ومن أجل تقويم النظرية وحدها .

وهكذا وجدت الرياضة نفسها مسوقة بالضرورة عند التماس أساس لليقين إلى الاستعانة بالمنطق الصورى الذى أصبح له منذ ذاك الوقت دور هام فى كل الأبحاث الخاصة بأسس الرياضة.

لقد كان هذا الانشعاب إلى التيارين المذكورين كما قلت بين الرياضيين منذ أواخر القرن الماضى وقد استمر فى القرن العشرين.

ولكن ما إن بزغ القرن العشرون حتى التقى التياران المذكوران فى نزعة ثالثة ومخالفة عند بعض الفلاسفة ذوى العقلية الرياضية هم أصحاب التيار اللوجستيقى أو المنطقى الصرف والذى يؤسس الرياضة على المنطق الصورى وحده. وأشير هنا إلى **برتراند راسل** وهو يتعهد والآخذين عنهما.

ولقد أحدث هذا التيار المنطقى رد فعل عنيف عند إمام الرياضيين المحدثين فى فترة ما بين الحربين وهو **ديفيد هلبرت** أستاذ الرياضة بجامعة برلين (توفى عام ١٩٣٧) فحاول فى تيار رابع أن ينتقل بالرياضة عن المنطق كما حاول ألا يعود إلى أساس كحدس الاتصال

الذى فارقته الرياضة منذ فترة طويلة فلجأ إلى الطريقة الأكسيوماتيكية وجاء بأكسيوماتيك جديد لا إلى المنطق ولا إلى الرياضة، أعنى بمعالجة لرموز لا تنتسب إلى أى من العلمين المذكورين وحاول أن يشتق منه المنطق والرياضة سويا .

ثم ما لبث أن ظهر على المسرح طلائع الرياضيين المعاصرين الذين لم يرضوا عن هذين الأساسين، المنطقى (التيار الثالث) والأكسيوماتيكى (التياران الثانى والرابع) فحاولوا الرجوع بالرياضيات إلى الوراء، إلى ما قبل المذهب الحسابى. فالتمسوا أساسا للرياضيات فيما سبق للرياضيات الحديثة أن تخلت عنه وهو «الحدس الرياضى» كأساس ومنبع أصيل ودائم لها. وبذلك عادوا إلى التقاليد القديمة فى الرياضيات .

فهذه خمسة تيارات أو مذاهب يجب الإشارة إليها لكى نستكمل الصورة التى نكوّنها عن مسألة أسس الرياضة فى الوقت الحاضر. ولكننا نختتم هنا بالكلام عن التيار الأول وحده لأنه مكمل للمذهب الحسابى ولأننا فى هذا الفصل بالذات أردنا بيان مسألة «تحسيب الرياضة» وأكسيوماتيك الحساب». فإلى هذا الأكسيوماتيك نوجه الآن الانتباه.

إذا كانت الكلمة الأخيرة للمذهب الحسابى هى أن الرياضة إنما

ترد بحذافيرها إلى العدد الصحيح، فلا غرابة فى أننا نجد رياضيى ذلك العصر لا يقبلون كعنصر حقيقى فى الرياضة كلها إلا الأعداد الصحيحة. وهكذا وقف رياضيو ذلك العصر أمام الأعداد موقف الإكبار والتقديس باعتبارها اليقين كله. وهذا ما جعل رياضيا كبيرا مثل **كرونكر** يقول فى عبارة مشهورة : «الأعداد الصحيحة تأتينا من عند الله وكل ما عداها فهو من تأليف الإنسان» .

ولكن الرياضيين الذين حرصوا على تأسيس علمهم على أسس وثيقة بعيدة عن الحدس لم يقتنعوا بنتيجة ثيولوجية كالتى انتهى **كرونكر**. حقيقة إن مبدأ ضرورة تحسيب التحليل قد أسبغ على العدد الصحيح قيمة مطلقة ووجودا أوليا وموضوعيا أكثر مما أعطى للرموز الرياضية الأخرى التى يتناولها الرياضيون. ولكن ألا يمكن للرياضيات أن تكون مرة أخرى فريسة حدس جديد يجعلنا نثق ببداهة الأعداد الصحيحة ونستمد يقين الرياضة من مثل هذه البداهة الحدسية؟ ثم ألا يمكن النظر إلى العدد الصحيح نفسه على أنه غير بديهى إلى هذا الحد وأنه قد يقبل تحليلا آخر يقودنا هذه المرة إلى أبعد من حدود المذهب الحسابى والرياضى بحذافيره ويمكّننا من تأسيس الرياضة كلها على أسس أوثق؟ هذا هو المبدأ الذى يبدو أنه سيطر على كل الأبحاث الخاصة بأسس الرياضة عند الرياضيين

والفلاسفة على السواء. منذ أواخر القرن الماضى وبخاصة فيما يتعلق بأكسيوماتيك الحساب .

فمن الواضح أن تأسيس فكرة الأعداد على أسس أكسيوماتيكية إنما يكسب هذه الفكرة عند أولئك الرياضيين الذين يلجأون إلى هذا المنهج الذى عرفته الرياضة منذ القدم كأوثق منهج لها، إنما يكسبها دقة ووضوحا ويقينا أوفى. ينتشر من المسلمات عبر الأعداد الصحيحة إلى كل أجزاء الرياضة الأخرى باعتبارها قد ارتدت فى المذهب الحسابى نفسه إلى الأعداد الصحيحة .

هكذا نرى **بيانو** Peano أستاذ التحليل بجامعة تورينو يحاول اقتفاء طريقة **مورتز باش** Moritz Pasch أبى الأكسيوماتيك الحديث فيعطينا أهم أكسيوماتيك للعدد إلى الآن، فيختار حدودا أولية ثلاثة هى : الصفر - العدد - التالى Succeseur. وخمس مسلمات هى بمثابة العلاقات المنطقية التى تبين استعمال تلك الحدود. ومن ثم الأكسيوماتيك الآتى لنظرية الأعداد :

١- الصفر، عدد.

٢- التالى لعدد، عدد.

٣- ليس لعددين ما، نفس التالى .

٤- ليس الصفر، تالياً لأى عدد.

٥- كل خاصية للصفر بما أنها تصدق عليه باعتباره عددا، فهى تصدق على العدد التالى له، كما تصدق على التالى لما يليه وهكذا، لنلاحظ أن هذه المسلمة الأخيرة هى التى تتضمن اطراد العمليات الحسابية مثل الجمع والضرب مثلا. وقد سمى **هنرى بوانكاريه** هذه الخاصية «الاستقراء الرياضى» Induction Mathematique أو الإستقراء بالتكرار Induction par reccurence كما أسماها **برتراند راسل** الخاصية الوراثية (Propriete Hereditaire) للأعداد أى أن ما يصدق على عدد ينتقل بالوراثة إلى غيره .

على كل حال أصبح أكسيوماتيك **بيانو** كلاسيكيا عند الرياضيين وغيرهم بحيث يدعيه لأنفسهم كثيرون من أمثال **ديدكند** مثلا. كما نجده مذكورا فى كل الأبحاث التى تتحدث عن أكسيوماتيك العدد. وقد قدم لهذا الأكسيوماتيك فى مصنفات **بيانو** تحليل منطقى بالطرق الرمزي (Symbolic) التى أدخلها جبر المنطق فى القرن الماضي لقضايا الرياضة بحيث تتحول إلى قضايا منطقية صرفة. وكان هذا كله بالطبع نقطة البداية لقيام اللوجستيقا (المنطق الرياضي) Logis-tique عند **راسل** فى القرن العشرين .

على أن أكسيوماتيك **بيانو** لم يكن الأكسيوماتيك الوحيد للعدد، إذ يمكن أن نحصى ما لا يقل عن اثنى عشر أكسيوماتيك آخر للعدد

عند رياضيين ومناطقة من أمثال **لاندو** Landeau **وهلبرت** و **بادوا** -Pa doa **وهنتجتون** Hantigton **وكونج** Konig وغيرهم .

ولا يغيب عن البال أن المذهب الحسابى بانتهائه إلى «أكسيوماتيك العدد» إنما يكون قد أينع ثمرته الأخيرة وأدى رسالته المنتظرة وهى أن الرياضة بابتعادها نهائيا عن الحدس المكانى إنما تصبح علما مجردا وصوريا يقوم على طائفة من الحدود والمسلمات الأولية التي ترد إليها سلسلة الأعداد الصحيحة ثم ما يليها من الأعداد كما رتبها المذهب الحسابى .

هذا فيما يختص بأكسيوماتيك العدد الذى ختمنا بنظير له فى الفصل السابق عن الهندسة عندما تكلمنا عن الأكسيوماتيك فيها. وكان ينبغى الوقوف عند هذا الحد كما يتضح من إشارتنا فى عنوان هذا الفصل، لولا أنه لابد من كلمة أخيرة عن التيار الثانى الخاص بأكسيوماتيك نظرية **كانتور**. هو تيار موضعى أى خاص بهذه النظرية وحدها. وقد تزعم **رزميلو** Zermelo حركة تقويم ما اعوج من نظرية المجاميع وذلك بتأسيسها على مسلمات، وتبعه فى هذه المحاولة الأكسيوماتيكية الكثيرون من أعلام الرياضيات المعاصرة أمثال **هاوسدورف** Felix Hausdorff **وكونج** Konig **وهاينكل** -Haen kel وغيرهم. وقد حاول هذا التيار تحاشى النقائض التى ذكرنا

نموذجا لها وذلك بإنشاء النظرية على أساس مسلمات تنتجها دون تناقض بين قضاياها . فاستخرج **زرميلو** مثلا المسلمات المتضمنة لها عند **كانتور** وأضاف إليها مسلمتين، تسمى إحداها مسلمة الانتقاء Axiome de selection وتسمى الأخرى مسلمة الرد أو الإرجاع Axiome de Reductibilite). ومع ذلك لم تسلم المسلمات من نقد الرياضيين كما أنها لم تستطع أن تتجنب النقائض تماما .

أما التيارات الثلاثة الأخرى فسنفرد لها مكانا أوسع فيما يلى وسنهتم بصفة خاصة بالتيار اللوجستيقى لصلته الواضحة بالفلسفة ولأنه قطب الرحى بالنسبة للتيارين اللاحقين اللذين يعتبران ردود فعل عليه .

الفصل السادس

المذاهب المعاصرة فى أسس الرياضة

(٢٢) معنى المذهب اللوجستيقى ـــ

(٢٣) معالم تاريخ المنطق الرياضى .

(٢٤) عرض لحساب القضايا الأولية فى اللوجستيقا .

(٢٥) اشتقاق العدد أو نظرية الحساب من ثوابت المنطق

(٢٦) المذهب الأكسيوماتيكى .

(٢٧) المذهب الحدسى والمذهب الحدسى الجديد .

(٢٢)

أشرنا فى ختام الفصل السابق إلى أن مسرح الأبحاث المعاصرة فى أسس الرياضة تتنازعه منذ بداية القرن العشرين ثلاثة تيارات هامة، يأتى المذهب اللوجستيقى فى مقدمتها لأنه أسبقها تاريخا فى ظهوره فوق هذا المسرح. ثم لأن الخلاف حوله هو الذى حدد ظهور المذهبين الآخرين كردود فعل عليه من قبل الرياضيين وهما المذهب الأكسيوماتيكى بزعامة **ديفيد هلبرت** والمذهب الحدسى الجديد بزعامة **بروور** (Brouwer) .

نريد الآن أن نوجه الانتباه إلى المذهب اللوجستيقى وحده. إنه مذهب اتخذ له أحيانا عند صاحبه **برتراند راسل** اسم «الفلسفة العلمية» (Scientific Philos.) وهو اصطلاح له ما يبرره، فإن نجاح منهج العلم جعل بعض الفلاسفة يحلمون بفلسفة علمية (دون أن يطلقوا هذا الاسم)، أعنى يحلمون بفلسفة يمكنها إذا اصطنعت لنفسها منهج العلم أن تصل إلى ما وصلت إليه العلوم المتقدمة من يقين ومن نتائج ثابتة تنمو مع الأيام،ومنذ فجر الفلسفة الحديثة حينما كانت الرياضيات أسبق العلوم نضجا نرى ديكارت أبو الفلسفة الحديثة يكرس المنهج الرياضى ويتخذه منهجا لفلسفته وللوصول إلى اليقين حتى فى الطبيعيات. وعلى العكس من ذلك

حينما نضجت الطبيعيات للاستقلال عن أمها الفلسفة عند **نيوتن** نرى فلاسفة متأثرين به من أمثال **لوك وهيوم** يدعون إلى منهج التجربة ويلجأون إلى التجربة الحسية وما يستمد منها من معان وأفكار لإقامة حقائق الفلسفة، هناك إذن دائما محاولات متجددة لإقامة فلسفة علمية. بمعنى فلسفة تستند إلى منهج أحد هذين العلمين المتقدمين فى الطليعة بالنسبة إلى العلوم كلها وهما الرياضيات والطبيعيات .

والمذهب اللوجستيقى فلسفة علمية بهذا المعنى، لأنه حين أراد أن يسهم فى الحركة الفكرية المعاصرة حول أسس الرياضيات، اصطنع لنفسه أولا وقبل كل شىء آلة رياضية دقيقة لتحليل المسائل المعروضة عليه، هى المنطق الرياضي (المسمى أيضا لوجستيقا) وهو المنطق الذى تسلح بسلاح الرياضة نفسها. أعنى تسلح بأدق الرموز وبالعمليات الحسابية المختلفة مبتعدا بذلك عن استعمال اللغة والأقيسة اللغوية على غرار أخته الرياضة. حتى أصبح قادرا تماما على التعبير عن قضايا الرياضة نفسها بلغة المنطق وحده وعلى تحليل أسسها التى انتهت إليها فى المذهب الحسابى وردها برمتها إلى حدود المنطق وقضاياه الصرفة. فأثبت بذلك المذهب اللوجستيقى نظريته الأساسية بطريقة علمية بحتة لا أثر للفلسفة فيها وهى أن

الرياضيات الخالصة Pure Mathematics ليست إلا فرعا من المنطق الصورى ولا شيء فيها غير صور المنطق وحده أي ثوابته -Con stants وإذا صدق هذا الرأى، فإن التمييز التقليدى بين العلمين - الرياضة والمنطق - ولو أنه قائم ووطيد، إلا أنه تمييز مُعتسف ومصطنع.

هذه هى الفلسفة العلمية التى دعا إليها منذ أوائل هذا القرن الفيلسوف الانجليزى **برتراند راسل** فى كتابه مبادىء الرياضيات Princples of Mathematics (١٩٠٣).

وتسمى تلك الفلسفة أيضا (لا عند صاحبها وإنما عند المؤلفين الآخرين من الرياضيين والفلاسفة الذين يتعرضون اليوم للكتابة فى موضوع أسس الرياضيات) بالمذهب اللوجستيقى أو النظرية اللوجستيقية (Logistic Theory) فى أسس الرياضة، وذلك ليس بالنظر إلى أن هذه العبارة تتضمن الإشارة إلى المنطق الرمزى Symbolic logic كما اصطلح **راسل** نفسه. ولكن سميت بالنظرية اللوجستيقية إشارة إلى شيء أبعد من مجرد المنطق. أعنى إلى تلك النظرية الأخرى الجريئة القائلة بأن الرياضيات الخالصة ليس فيها شيء غير عناصر المنطق الصورى وحده. وأنها تشتق منه كفرع له فى نسق علمى واحد ، وكذلك أيضا إشارة إلى أن حل نقائض

الرياضة المعاصرة التى سبق أن نوّهنا عنا احتاجت إلى قيام نظرية أخرى لهذا الغرض وحده سماها **راسل** نظرية الأنماط Theory of Types، أدخلهـا فى ذلك النسق الموحـد كطريقـة لحل النقـائص الرياضـية ولم تعـرف نظرية الأنماط هذه إلا فى هذا النسق وحـده، وهذان الوجهان للمذهب اللوجستيقى - ردُّ الرياضة بحذافيرها إلى المنطق الصورى ثم حل نقائض الرياضـة بإقامة نظرية كالأنماط- ليسـا من المنطق فى شىء ولا يمتّـان بصلة إلى المنطق فى ذاته من حيث هو كذلك إذ هما غـرضـان زائدان عن حاجـة المنطق ويمكن للمنطق أن يقوم بدونهما، ولا يخصان إلا هذه الفلسفة العلمية المعينة التى عرفت «بالنظرية اللوجستيقية» فى كل المؤلفات المعاصرة. ولذلك يجب استبقاء هذه التسمية للدلالة على هذه النظرية. ومع ذلك فإن النظرية اللوجستيقية هذه ليست جديدة كل الجدة ولم تنبع كاملة بحذافيرها من رأس **برتراند راسل** كما نبعت «بالاس أثينه» من رأس **زيوس** فى أساطير اليونان فقد سبقتها محاولات جادة فى هذا الاتجاه. ولذلك يستحسن أن نقسم خطوات عرضنا لهذه النظرية على الوجه الآتى :

الخطوة الأولى نخصصها للمحة تاريخية فى معالم الطريق الذى انتقل فيه المنطق الصورى من علم لغوى نقيس فيه بالألفاظ إلى علم رياضى نحسب فيه الاستنباطات كما نحسب فى الرياضة .

والخطوة الثانية إشارة إلى أنواع الحساب المنطقى مع تخطيط لهيكل الحساب الأولى منها الذى يستند إليه البنيان اللوجستيقى كله.

والخطوة الثالثة بيان طريقة اشتقاق الرياضة البحتة من المنطق الصورى وهو الموضوع الأساسى فى فلسفة الرياضة من وجهة نظر هذا المذهب فى بحثنا هذا. مع مناقشة أيضا لبعض نقاط هذا الموضوع .

وبهذا نستكمل الصورة التى يمكن أن نعرض فيها هذه النظرية

(٢٣)

لفظ «لوجستيقا» (Logistica) معروف عند القدماء للدلالة على جداول يجد فيها الحاسبون نتائج العمليات الحسابية جاهزة دون تكبد إجرائها، وتذكرنا بجداول اللوغارتمات اليوم. ثم أطلق استعمال اللفظ منذ مؤتمر الفلسفة الدولى المنعقد فى جنيف عام ١٩٠٤ للدلالة على المنطق المعاصر فى صورته الرياضية. كما يطلق عليه أيضا «المنطق الرياضى» (Mathematical logic) و «المنطق الرمزى» (Synbolic Logic) وتوجد مجلة يصدرها تحت هذا الاسم الأخير اتحاد المناطقة منذ ١٩٣٧ بنجاح كبير فى أمريكا هى (Journal of

.Symbolic Logic)

أما عند مؤلفى القرن التاسع عشر الذين لهم الفضل فى إيقاظ المنطق من سباته الطويل وإرسائه على قواعد حسابية (Calculus) فقد كان الاسم الشائع له هو جبر المنطق (Algebra of Logic).

وفى مجال هذا الجبر سبقت محاولات جادة أيضا عند الفيلسوف والرياضى **ليبنتز** (Leibinz) فى القرن السابع عشر، وكانت كتاباته المختلفة فى هذا الموضوع محاولات فيما كان يحلم به من تأسيس علم أعم من الرياضيات، فيه يتحول الاستنباط إلى حساب، سماه حينا الرياضة العامة Mathematique Universelle وحينا آخر الأبجدية العامة Caracteristique Iniverselle. فهو أول من نظر إلى المنطق كأساس ترد إليه كل معرفة تريد أن تكون يقينية ومنها الرياضيات بالطبع، ولذلك ليس غريبا أن نجد اللوجستيقيين فى بداية أمرهم يؤلفون فى منطق **ليبنتز** وينشرون آراءه المؤيدة لموقفهم. **فبراتراند راسل ولويس كوتوراه وتلاميذ بيانو** اهتموا جميعا بدراسته وبالتنقيب عن مخطوطاته المنطقية المحفوظة فى مكتبة هانوفر حيث عاش. ويعتبر بحق عند اللوجستيقيين الأب الحقيقى للوجستيقا أكثر مما يعتبر جَبْرِيُّو المنطق فى القرن التاسع عشر ذلك، لأن **ليبنتز** اهتم برد قضايا المعرفة وعلى رأسها القضايا الرياضية

إلى المنطق الصورى، وهذه هى النظرية المشتركة بينه وبينهم. ثم إنه بين أنه لا يمكن برهان تلك النظرية إلا إذا توافر مقدما أمران : أداة رمزية وثيقة وحساب منطقى . أما فيما يختص بإدخال الرمز إلى ميدان المنطق فقد كلفت ذلك عبقريته الرمزية في الرياضة التى كانت مثلا يحتذى عند الرياضيين وعاملا من عوامل تقدم الرياضيات وانتشارها فى أوروبا كلها وتدين له الرياضيات بالكثير من رموزها .

وفيما يختص بالحساب المنطقى فقد عالج معالجات رياضية، طائفة من العلاقات التى لا تُعنى بها الرياضة والتى هى من صميم المنطق، مثل علاقات الذاتية (Identie) والتضمن أو الاحتواء (Inclu-sin) والمساواة واللامساواة وأكبر من. وأصغر من. والفصل. والوصل. وغير ذلك مما يجدد المنطق كحساب رياضى للاستنباطات.

فتناول كل علاقة من هذه العلاقات فى حساب منفصل. ويعلق **لويس كوتوراه** فى كتابه القيم عن منطق **ليبنتز** (La Logique de Leibniz) بأن النتائج التى توصل إليها هذا الفيلسوف الرياضى قبل قرنين من ظهور **جورج بول** تشهد بأنه كان أكثر تفوقا وتقدما بالقياس إلى ما وصل إليه **جورج بول** Boole مؤسس جبر المنطق فى القرن التاسع عشر الذى قدم للّوجستيقا .

لم تترك أبحاث **ليبنتز** فى جبر المنطق أثرا على المناطقة اللاحقين

وظلت أبحاثه المخطوطة حبيسة مكتبة هانوفر، حتى اكتشفها اللوجستيقيون منذ أواخر القرن الماضى. لذلك نجد أن مواطنه الفيلسوف الكبير **إيمانويل كانط** الذى كتب بعده بنحو قرن تقريبا لم يفطن إلى إمكان تطور المنطق إلى حساب، إذ كان يجهل تماما أبحاث سلفه **ليبنتز** المبتكرة التى نقلت المنطق خطوة أكيدة وكبيرة إلى الأمام. فقرر فى نظرية غريبة له فى مقدمة الطبعة الثانية من كتاب (نقد العقل الخالص) أن المنطق دخل الطريق العلمى الأكيد وولد كاملا منذ أرسطو، لأنه لم يحتجْ أن يتقهقر إلى الوراء ليراجع أخطاءه ويصححها، كما أنه لم يأت فيه مؤلف بجديد منذ ولادته. وما سر ولادته كاملا على هذا النحو من أول خطوة له إلا بساطة موضوعه كما يقول حيث لا ينظر للعقل إلا فى صور تفكيره وحسب.

ولكن سرعان ما تبددت نظرية اكتمال المنطق هذه وأصبح المنطق الذى اعتبره **كانط** منتهيا مقفلا على نفسه منذ **أرسطو** أكثر العلوم حركة وتجددا منذ ظهور كتاب **جورج بول** وعنوانه An Investigation into the Laws of thought فى عام ١٨٥٤ الذى وضع فيه **بول** أساس نظرية «جبر المنطق» ثم أصبح بعده البحث فى هذه النظرية حركة عالمية اشترك فيها مؤلفون فى إنجلترا من أمثال **جيفنز** Jevons **وفن** Vennوفى ألمانيا مثل **شرويدر** Sehroder وفى

أمريكا مثل **شارل ساندرس بيرس** Peirce وفى فرنسا مثل **لويس كوتوراه** وفى إيطاليا مثل **بيانو** Peano **وتلاميذه** الكثيرين، ولا يزال المرجعان الأساسيان فى هذه النظرية، المؤلف الضخم **لشرويدر** وعنوانه Algebra der logik (من ١٨٩٠ إلى ١٩٠٥) والكتاب الموجز القيم **للويس كوتوراه** وعنوانه Algebre de la La Logique (١٩٠٥) وبهذين المؤلفين توقفت الأبحاث فى هذه النظرية بعد أن ظهر على المسرح المنطق الرياضى المعاصر (اللوجستيقا) عند **راسل**، لأن جبر المنطق هذا اتضح أنه فصل من فصول المنطق الرياضى يقابل حساب «الفئات» (Calculus of Classes) وبذلك أصبح جزءا من نظرية أوسع .

فى جبر المنطق الذى أعاد اكتشافه فى القرن الماضى **جورج بول** دون أن يعلم شيئا إطلاقا عن كتابات **ليبنتز** تتغير بعض العمليات الحسابية عن مثيلتها فى الجبر المألوف وخاصة عمليات الجمع والضرب، وهذا التغير بالإضافة إلى القوانين المترتبة على تلك التغيرات أهم ظاهرة في هذا الجبر .

إلا أن هذا التغير أو قل هذا الانحراف عن المألوف فى الجبر العادى لم يعد أمرا غريبا فى رياضيات ذلك العصر. فإن المبدأ الذى كان يعتنقه الرياضيون إلى منتصف القرن الماضى الخاص بضرورة

اطراد العمليات الرياضية اطرادا لا يتخلف فى كل نظريات الرياضة، أصبح مبدأ كان لابد لهم من التخلى عنه لكى تسير الرياضيات قدما إلى الأمام كما تخلت الهندسة من قبل - وقد رأينا هذا - عن مبدأ بقاء المسلمات فى الهندسة على حالها عندما أدخل الهندسيون تغييرات فيها أدت إلى هندسات أخرى لم تكن متوقعة مثل الهندسات غير الأقليدية. ولم يكن جبر المنطق وحده هو الذى انحرف من معانى عمليات الجبر المألوف. فلقد نشأت فى ذلك العصر نظريات جبرية أخرى تختلف عن الجبر المعتاد فى عملياتها وقوانينها مثل نظرية الأعداد الرباعية Quatrenions عند **روان هاملتون** والحساب الهندسى Calcul Geometrique عند **جراسمان**، ونظرية المجاميع Sets عند **جورج كانتور** وربما غير ذلك .

إن أهم ما يفرق بين جبر المنطق والجبر المعتاد هو ما أسماه **بول**، قانون الثنائية Law of Duality الذى يقرر أن هناك ثنائية جبرية (ومن ثم جاء الاسم ، كما أسماه أيضا اللوجستيقيون قانون التوتولوجيا Tautology أو اللغو أو التكرار غير المقيد) بين الجبر العادى وجبر المنطق .

ففى الجبر العادى : **ص + ص = ٢ص**

وكذلك **ص × ص = ص^{٢}**

بينما في جـبر المنطق دلت **ص** لا على عدد كمـا الرياضـة، وإنما على «فئة» منطقية (Class) كفرقة إطفاء المدينة أو كسكان قُطر من الأقطار مثلا، فإن تكرار هذه الفئة مهما كانت صورته أعنى بالجمع أو بالضرب لا يغير شيئا من الفئة ذاتها، إذ تظل كما هى عليه نفس الفـئة، أعنى نفس فـريق الإطفـاء أو نفس سكان القطر، وعلى هذا يكون فى جبر المنطق :

ص + ص = ص

ص × ص = ص

وهكذا يساوى الكل جزأه. وهذا تعديل جوهرى فى قانون التبادل Law of Commutation المعروف فى الجبر المعتاد. وكذلك ينحرف جـبـر المنطق أيضـا عن قـانون التـوزيع Law of Distribution المعروف فى الجبر العادى. والتوزيع الذى يجمع بين الجمع والضرب له صيغتان فى جبر المنطق :

(١) **أ (ب + ج) = أ ب + أ ج**

(٢) **أ (ب + ج) = (أ + ج) (ب + ج)**

والصيغة الأخيرة وحدها تميز جبر المنطق ولا تستقيم فى الجبر المعتاد، بحيث يمكن وصف هذا الجبـر الجديد بأنه نصف توزيعى بالإضـافة إلى أنه توتولوجى (بالنسـبة للتبادل) وهـاتان الخاصـتان

المميزتان لهذا الجبر من خواص اللوجستيقا أو الحسابِ المنطقى أيا كان .

لا أريد الاستطراد إلى أبعد من هذا في تناول هذا الجبر اكتفاءً بالإشارة إلى خصائصه العامة المميزة له.

ولقد حقق جبريّو المنطق فى علمهم هذا، حلم **ليبنتز** فى رياضة عامة أو أبجدية عامة فيها تتحول الاستنباطات إلى حساب، وقدموا بذلك الأداة الفنية لتحليل النُسُق العلمية تحليلا منطقيا، أو أن شيئاً علميا أيضا مما أفادت منه المدرسة اللوجستيقية كل الفائدة. ولكن الأبحاث في هذا الجبر قد توقفت فى أوائل هذا القرن بمناسبة ظهور اللوجستيقا على المسرح الفكرى. وفى الواقع كان جبر المنطق جبراً أكثر من مطلق فى الكثير من جوانبه، فى طريقة حل مسائله، وفى احتمال تفسير نتائجه تفسيرا مزدوجا، أعنى إما عدديا وإما منطقيا. هذا بالإضافة أيضا إلى احتمال التفسير المنطقى نفسه لتفسيرَيْن فى آن واحد، أحدهما تفسير بالفئات (Classes) والآخر بالقضايا Propositions وهناك فارق كبير بينهما طبعا.

ومن ثم يمكن القول بأن جبر المنطق لم يكن منطقا إلا بالعرض. أى بإلزامه تفسيرا منطقيا ليس الوحيد له، وهذا النقص الذريع راجع إلى عدم تكشفه عن «الثوابت» المنطقية الهامة التى بدونها لا

يتأكد المعنى المنطقى «كالتضمن» مثلا.

أما التكشف عن أهم الثوابت المنطقية الضرورية لاستكمال منطق رياضى فيرجع إلى مؤلفين اثنين، أحدهما **بيانو** Peano فى إيطاليا وآخرهما **جوتلوب فريجه** Gottlob Frege فى ألمانيا .

أما **بيانو** فكان أستاذا لعلم التحليل فى جامعة تورينو واهتم بحركة أسس الرياضة وساهم هو وتلاميذه فى تأسيس مسلمات الهندسات كما ساهم فى أكسيوماتيك العدد. وفيما يختص بدوره فى جبر المنطق كان كتابه Formulaire de Mathematiques (١٩٠٤-١٩٠٨) أكثر تقدما من حيث دقة رموزه كما تكشف عن ثوابت لم يعرفها جبر المنطق وأهم من هذا كله أدخل «المتغيرات» Variables فى كل صيغ المنطق، بحيث أصبح المنطق قادرا تماما على التعبير عن قضايا الرياضة كلها برموزه وحدها .

أما **فريجه** فهو منطقى ألمانى وفى كتبه المتلاحقة عن رموز المنطق وعن أسس الحساب التى امتد صدورها من ١٨٧٩ حتى سنة ١٩٠٣، تفرغ لمسألة أسس الرياضة التى تركها مذهب تحسيب الرياضة عند الأعداد الصحيحة. ورأى أنه يمكن - استنادا إلى تعريف للعدد شاع عند رياضيين من أمثال **ديدكند وكانتور** - أن يرد هذا التعريف إلى «ثوابت» المنطق الصورى وحدها بحيث يمكن

استنباط الأعداد. ومن ورائها الرياضيات كلها كما رتّبها المذهب الحسابى من مبادىء المنطق الصورى وحده. فكان **فريجه** بهذا هو الأب الحقيقى لجانب محدد من المذهب اللوجستيقى هو جانب اشتقاق الرياضيات من المنطق. وكانت باكورة مؤلفاته عام ١٨٧٩ تكوين هذا المنطق الرمزى. ثم تابع عمله فى مؤلفاته الأخرى عن أسس الحساب بأن اشتق الأعداد من المنطق.

إلا أنه لم يكن رياضيا **كبيانو** مثلا، ففشل حيث نجح **بيانو** من حيث أن رموزه التى اقترحها للمنطق رغم دقتها البالغة كانت غير رياضية بالمرة ولا طيعة الاستعمال، فوق أنها ثقيلة للغاية لأنها تمتد على غير المألوف طولا وعرضا مما جعل مؤلفاته بمنأى عن القراء ولم يفد منها لاحق .

هذان التياران، تيار جبر المنطق بالرموز الطيعة مع إدخال المتغيرات مما تمتاز به أعمال **بيانو**، ثم تيار رد الأعداد التى انتهى إليها المذهب الحسابى كسند أخير للرياضة إلى ثوابت المنطق وحده عند **فريجه**. هذان التياران التقيا عند **برتراند راسل** صاحب النظرية اللوجستيقية فى أسس الرياضة التى نحن بصددها. ولقد أفاد **راسل** كل الإفادة من رموز **بيانو** وأضاف فى التحليل المنطقى رموزا أخرى مهمة جدا، فى حين أنه كان يجهل تماما أعمال **فريجه** فى اشتقاق

الأعداد من حدود المنطق وتصوراته. ولكن شيئا ما في الجو الفكرى آنئذ أملى عليه نفس الفكرة التي بعثت **فريجه** إلى محاولتها. فحاول **راسل** نفس المحاولة فى اشتقاق الأعداد من المنطق بقوة ووضوح نادرين وغير مسبوقين. وتناول هذا الموضوع مباشرة فى كتابه الأول Principles of Mathematics الصادر عام ١٩٠٣ ثم مرة ثانية فى كتابه بالاشتراك مع **هويتهد** Principia Mathematica الصادر فى ١٩١١ / ٩١٣، والفارق بين الكتابين هو أن الأول موجه إلى الفلاسفة وحدهم ومن ثم فهو مكتوب بلغة الكلام. أما الثانى فموجه إلي الرياضيين المهتمين بمشكلة أسس الرياضة ومن ثم فهو مكتوب كله بالرموز.

هناك مرحلتان لفهم المذهب اللوجستيقى، الأولى مرحلة فهم أصول هذه النظرية المنطقية بالقدر الذى يسمح بمتابعة فهم موضوع فلسفة الرياضة والثانية مباشرة اشتقاق الرياضة من هذا المنطق...

ونبدأ فورا بالمرحلة الأولى

(٢٤)

نريد أن نلم سريعا بهيكل المنطق الرمزى أو علي الأصح بأول حساب فيه المسمى «حساب القضايا الأولية» الذى يستند إليه

اللوجستيقى. وطبعا نلجأ هنا إلى هذا المنطق فى صورته التى أصبحت كلاسيكية تماما بالنسبة إلى كل الأبحاث اللاحقة. أعنى نلجأ إلى واضعه **برتراند راسل**، بادئين بنقطة هامة من كتابه الأولى (١٩٠٣) .

فمنذ الصفحة الثالثة من هذا الكتاب يعرض **راسل** لتصوره الصورى أو المنطقى للرياضة، فيخرج بذلك عن المألوف عند الفلاسفة منذ **كانط** الذى يرد الرياضة إلى ما في تركيبنا الذهنى (أو الحسى بالذات) من حدوس للمكان والزمان تسمح بتركيب الأشكال وإنشاء الأعمال التى تبرر الأحكام التركيبية القبلية للرياضة، فيبين **راسل** أنه لا حاجة بنا إلى القول بمثل هذا التركيب الذهنى عند بحثنا فى طبيعة الرياضة وأسسها ويدعو إلى إسقاطه من الاعتبار. ويؤيده فى ذلك أن تقدم الرياضة منذ حركة النقد الباطنى فيها إنما كان على حساب استبعاد كل حدس كما رأينا .

فيقول **راسل** فى تعريفه لتصوره المنطقى لقضايا الرياضة : «إن الرياضيات الخالصة أشبه بالقضايا التى صورتها دائما من نوع **ل** تتضمن **م** حيث **ل** و **م** قضيتان تشتملان على متغير يبقى بعينه فى القضيتين، وحيث لا تشتمل القضيتان على ثوابت، غير ثوابت المنطق».

ويجب ألا يفزعنا هذا التعريف فهو يريد أن يقول إن قضايا

الرياضة الخالصة أشبه بالقضايا الشرطية (وهذا معنى التضمن) التى لا تؤكد شيئا فى عالمنا الخارجى كما هو الشأن فى قضايا الرياضة التطبيقية المعبرة مثلا عن حرارات وسرعات..إلخ، وإنما تقول تلك القضايا الشرطية بكل بساطة «إذا» أخذت بالمقدم «فيلزم» عنه التالى، أعنى أنها كلها قضايا افتراضية يتضمن فيها الشرط جوابه دون أدنى اكتراث للوجود الخارجى.

هذا وإذا حللنا تلك القضايا الشرطية فلن نجد فيها غير ثوابت منطقية Logical Constants ومتغيرات (Variables) أعنى لن نجد غير صور منطقية صرفة لا تقول لنا شيئا آخر غير المنطق .

إذا فهمنا هذا التعريف أمكننا أن نفهم بسهولة تعريفا آخر عجيبا للرياضة الخالصة يقول فيه **راسل** : «الرياضة الخالصة هى العلم الذى لا نعرف فيه قط عمّ تتحدث ولا إذا كان ما نقوله فيها صادقا» فنحن لا نعرف عم نتحدث لأننا لا نجد فيها غير المتغيرات والثوابت المنطقية دون أدنى مادة أخرى سواء فى الخارج أم مادة حدسية فى الذهن، ثم نحن لا نعرف إذا كان ما نقوله صادقا لأن صدق القضايا المستنبطة يتوقف على صدق الفرض أو الشرط وصدق الشرط يتوقف بدوره على القيم المعينة التى تعوض عن المتغيرات فيه. ولما لم يحدث ذلك التعويض فنحن لا نعلم إذا كان ما

نقوله فى الرياضة صادقا.

بعد الفراغ من هذين التعريفين اللذين يباعدان بين تصور **راسل** المنطقى للرياضة وتصور الحدسيين أتباع **كانط** من الرياضيين الذين أصروا على قيام الرياضة على نوع من التجربة الذهنية تسمى «الحدس الرياضى» (حدس الأشكال المكانية والأعداد)، نركز الكلام فقط على «الصور المنطقية» التى تسمى أيضا «ثوابت» المنطق.

والصور المنطقية للقضايا والعلاقات المنطقية بينها والتى بواسطتها يتدرج الاستنباط من قضية إلى أخرى هى كل موضوع المنطق.

والصورة المنطقية لأية قضية هى الصورة التى تشترك ومثيلاتها فيها. وهناك بالطبع صور منطقية عديدة للقضايا. فليست صورة القضية «سقراط فيلسوف أو رياضى» كصورة القضية «سقراط عاش قبل أرسطو»، فالأولى «قضية منفصلة» كما يقول المناطقة والثانية تعبر عن «علاقة» بين طرفين هى علاقة «عاش قبل» وكلتاهما قضية تختلف عن الأخرى. إن حصر هذه الصور المنطقية للقضايا من أهم ما يميز المنطق الرياضى المعاصر.

أما العلاقات بين القضايا فهى الشروط أو القواعد التى بمقتضاها تستنبط من صدق القضية **ل** مثلا صدق قضية أخرى، أو

قضايا مثل **ل١ . ل٢ . ل٣**... ففى منطق القياس التقليدى الذى يقوم على ألفاظ اللغة تنحصر تلك الشروط فى قيام حد أوسط يشارك الطرفان فى معناه (وإلا استحال القياس) وفى مراعاة الكم والكيف والسلب والإيجاب. أما فى المنطق الرياضى وفى أبسط حساب فيه ونقطة بدايته أيضا المسمى حساب القضايا أو حساب القضايا الأولية (Elementary Calculus of Proposeistions) فلا نظر فى حدود القضايا وبالتالى لا بحث عن حد أوسط يشتراك الطرفان فى معناه فكل هذه الحواجز اللغوية تسقط من الاعتبار. وإنما تؤخذ القضايا جميعا كوحدات كل وحدة منها غير منقسمة من داخلها أو محللة إلى حدود (كالموضوع والمحمول) كما لا ننظر إلى المعنى القاموسى كذلك، ثم يرمز إلى كل وحدة بحرف مثل الحرف **ل** أو **م** أو **ن** مهما كان طول القضية ومهما اختلفت القضايا فيما بينها فى معانيها القاموسية، فيحاول ذلك الحساب فقط بأن يحدد علاقات تلازم بين قيم «الصدق والكذب» التي تنسب إلى تلك الوحدات أو القضايا. مثلا النظرية الخامسة فى هندسة **أقليدس** تلزم عن الرابعة، فإذا كانت الرابعة صادقة (الشرط) فيلزم صدق الخامسة (المشروط) . وعلى عكس ذلك إذا كانت الخامسة كاذبة (المشروط) فيلزم كذب الرابعة (الشرط). وإذن فهناك استنباط أو علاقة استنباطية بين

قضيتين ليس بنيهما اشتراك فى المعني اللغوى لأن كل نظرية تتحدث عن شيء مختلف، وإنما فقط على أساس قيمتى الصدق والكذب اللتين يمكن نسبتهما إلى كل منهما.

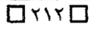
القضايا - أو صورها - التى تعالج فى حساب القضايا الأولية هذا، محدودة العدد. والعلاقات الاستنباطية بينها تتوقف على ما لها من قيمتين هما الصدق والكذب. أما رموزها التى اصطلح عليها **راسل** والتى أصبحت اصطلاحا دوليا وتقليديا فى كل المؤلفات فهى كما يأتى :

(١) الحروف اللاتينية ابتداء من حرف ٠/ يدل كل واحد مها على قضية موجبة. ونحن نصطلح بديلا عربيا لها الحروف ابتداء من حرف **ل** . وعلى ذلك فإن **ل** بمفردها تدل على قضية موجبة وتقرأ « **ل** صادقة» .

(٢) فإذا أدخلنا على **ل** علامة - للنفى، دلت - **ل** على قضية سالبة وتقرأ « **ل** كاذبة» .

(٣) وإذا أدخلنا بين قضيتين **ل. م** العلامة **٧** دلت القضية **ل ٧ م** على قضية منفصلة (الجمع المنطقى).

(٤) فإذا أدخلنا بين قضيتين العلامة c ، دلت **ل** c **م** على أن الأولى تتضمن الثانية، بمعنى أن صدق الثانية يلزم عن صدق



الأولى.

(٥) وإذا أدخلنا بين قضيتين العلامة . دلت **ل م** على أن القضيتين يتساويان صدقا أو كذبا.

ولما كان يجب ألاّ نقبل فى المنطق الرياضى حداً جديدا إلا إذا أمكن رده إلى حدود سبقت معرفتها فيه، وألا نقبل فية قضية إلا إذا ارتدت بالبرهان إلى مسلمات أو قضايا سبق برهانها، أعنى لما كان هذا المنطق يجب أن يتكون فى صورة نسق استنباطى بالمعنى الذى سبق أن شرحناه، وذلك لكى نطمئن إلى سلامة خطوات اشتقاق الرياضة منه، فإن **راسل** اختار فى كتابه بالاشتراك مع **هويتهد** حدْين أوليَّين اثنين من تلك الصور السابقة، هما النفى والفصل ليعرِّف بالاشتقاق على أساسهما الحدود الباقية، كما اختار خمس مسلمات (أو قوانين من المنطق) تسمح بأن نشتق منها بالبرهان كل القوانين المنطقية الأخرى.

فإذا وضعنا أمامنا النفى والفصل كحدين أوليين، فسنحصل على التعريفات الآتية للعلامات المشتقة منها للتضمن والفصل والمساواة :

- تعريف التضمن : **ل ⊃ م = − ل ∨ م**
- تعريف الوصل : **ل . م = − (− ل ∨ م)**
- تعريف المساواة : **ل = م = (ل ⊃ م) . (م ⊃ ل)**

أما المسلمات التى قبلها للنظرية المنطقية فهى :

(١) (ل ٧ م) c ل

(٢) م c (ل ٧ م)

(٣) (ل ٧ م) c (م ٧ ل)

(٤) (ل ٧ (م ٧ ن)) c (م ٧ (ل ٧ ن))

(٥) (م c ن) c ((ل ٧ م) c (ل ٧ ن))

وعلى أساس هذه المسلمات الخمس يبرهن **راسل** كل القضايا المنطقية التي تستعمل الحدود السالفة الذكر فإذا تم البرهان اعتبر القضية المبرهنة قانونا (أو كما يقول توتولوچيا) من قوانين المنطق. وقد أربت تلك القوانين المبرهنة على أكثر من خمسمائة قانون للمنطق لا يمثل القياس التقليدى منها غير قانونين اثنين من ذلك العدد الضخم، وهكذا اتسع المنطق الرياضى لعدد ضخم من قوانين الاستنباط المنطقى التي حصرها المنطق التقليدى فى ضروب وأشكال القياس الضيقة، فأصبح بذلك المنطق قادرا على استيعاب الاستنباطات الرياضية المعقدة الكثيرة .

بعد أن أوجزنا أهم العناصر التى يستند إليها حساب القضايا الأولية، يبقى بيان كيفية إجراء الحساب أو الأستنباط. وغرض الحساب هو إثبات أن صيغة ما من المنطق، هى قانون (أى

توتولوچيا) فيه بمعنى، أنها صيغة دائما صادقة مهما عوضنا من قيم محددة بدلا عن المتغيرات فيها. وبرهان كل قضية منطقية على هذا النحو ابتداء من المسلمات أو مماسبق أن اشتق منها بالبرهان ضمان لعدم الاستناد إلى بداهة أو حدس حسى أو أية مغالطة أخرى، وهو أمر ضروري لهذه النظرية المنطقية التى تحتاج إلى الحذر الشديد من قبول عناصر غير منطقية فى الوقت الذى أخذت فيه على عاتقها اشتقاق الرياضة منها وإثبات أنها منطق وحسب .

وفى كل فرع من فروع الرياضة توجد قواعد عملية لاشتقاق النظريات من المسلمات. وفى حساب القضايا الأولية الذى نحن بصدده هناك قاعدتان :

القاعدة الأولى: قاعدة التعويض، وهي قاعدة تقول إنه يمكن فى أية صيغة من المنطق أن يعوض عن رمز فيها مثل **ل** حيثما وجد بصيغة أخرى تعادله صدقا أو كذبا مثلا فى الصيغة **ل ٧ – ل** (وتقرأ **ل** أما صادقة وأما كاذبة) يمكن التعويض عن **ل** بالصيغة نفسها على الوجه الآتي :

(ل ٧ – ل) – ٧ (ل ٧ – ل)

القاعدة الثانية : قاعدة الاستنتاج وهى قاعدة مستعملة فى العلوم الرمزية، وإن لم يكن مصرحا بها ومؤداها أنك إذا علمت أن **أ** وكذلك

أ ⊃ ب من قوانين المنطق. فإنك تستطيع أن تستنتج ثبوت ب بمفردها كقانون أيضا ويمكن وضع هذه القاعدة فى الصورة الرمزية الآتية :

أ

أ ⊃ ب

ـــــــــــ

ب

وهذه القاعدة كما يدل مؤداها هى التى تسمح بالانتقال أو التدرج من المقدمات إلى نتائجها .

إن هذا الموجز لخطوات حساب القضايا يمكن الآن فقط أن يتوج بمثال للبرهان على أن الصيغة الآتية مثلا هى قانون أو توتولوچيا منطقية :

(ل ⊃ م) ⊃ ((م ⊃ ن) ⊃ (ل ⊃ ن))

وخطوات البرهان على هذه القضية عند **راسل** كما يأتى :

وفقا لتعريف التضمن (ل ⊃ م) = (- ل ٧ م)

يعوض - **ل** بدلا من **ل** وكذلك - **م** بدلا من **م** فى المسلمة الرابعة مع التعويض عن التضمن بتعريفه نحصل على الصيغة الآتية :

((- ل) ٧ (- م ٧ ن)) ⊃ ((- م) ٧ (- ل ٧ ن))

وبتطبيق تعريف التضمن نفسه على هذه الصيغة نحصل على :

(ل ɔ ل) ɔ ((م ɔ ن) ɔ (م ɔ (ل ɔ ن))).........................(١)

ثم بتعويض – ل بدلا من ل فى المسلمة الخامسة، وباستعمال التعريف بدلا من علامة التضمن نحصل بنفس الطريقة على الصيغة الآتية :

(م ɔ ن) ɔ ((ل ɔ م) ɔ (ل ɔ ن)) .... (٢)

ثم بتعويض م ɔ ن بدلا عن ل، ثم ل ɔ م بدلا عن م . ثم ل ɔ ن بدلا عن ن فى الصيغة (١) نحصل على :

((م ɔ ن) ɔ ((ل ɔ م) ɔ (ل ɔ ن)))

ɔ ((ل ɔ م) ɔ ((م ɔ ن) ɔ (ل ɔ ن))) .... (٣)

وهى صيغة من النوع أ ɔ ب حيث أ هو الصيغة (٢) التى بينا أنها توتولوجيا، فالقاعدة الثانية وهى مبدأ الاستنتاج يسمح باستنتاج أن الصيغة (٢) وهى :

(ل ɔ م) ɔ ((م ɔ ن) ɔ (ل ɔ ن))

هى أيضا توتولوجيا وهو المطلوب برهانه. وهكذا يبرهن **راسل** على أكثر من خمسمائة قضية أو قانون منطقى فى هذا الحساب.

لقد أغفلنا هنا ما كان يمكن أن يقال من تحسينات لاحقة فى هذا الحساب ومن تعليقات نقدية واكتفينا بما هو ضرورى لفهمه. وليس هو الحساب الوحيد، إذ يأتى بعده حساب الدوال القضائية التى ترد

إليها دوال الرياضة، وفى هذا الحساب تحلل القضية إلى موضوع ومحمول، ثم يأتى بعد ذلك حساب الفئات Calculus of Classes ثم حساب العلاقات Calculus relations وكلاهما يتصلان فيما بينهما، كما يتصلان معا باشتقاق قضايا العدد. وهنا فى هذه المرحلة لا نعرف - على حد تعبير **راسل** - متى انتهى المنطق ومتى بدأت الرياضة. ولقد اكتفينا بحساب القضايا الأولية لأنه كالقاعدة التى يبنى عليها البناء المنطقى كله باعتباره نسقا استنباطيا.

(٢٥)

لننتقل الآن إلى جوهر النظرية اللوجستيقية التى ترجع إلى **جوتلوب فريجه** فى القرن الماضى وإلى **برتراند راسل** فى القرن العشرين وأعنى بذلك اشتقاق الرياضة (أو بالأحرى اشتقاق «الأعداد» التى ارتدت إليها الرياضة كلها فى المذهب الحسابى) من المنطق الصورى وحده .

ولما كان هذا البحث موجها إلى الفلاسفة دون الرياضيين، فإننا سنتحاشى كل تعقيدات فنية فى استعراضنا **لراسل**، فلا نلجأ إلى الصيغ الرمزية إلا فى أضيق نطاق ونكتفى بشرح مقاصد النظرية مع التعليق عليها بتمهيدات ومقارنات وتوضيحات تقربها .

نحن نعلم أن **راسل** عرّف الرياضة الخالصة بأنها «فئة تلك القضايا التى صورتها **ل** تتضمن **م** حيث **ل** ، **م** قضيتان تشتملان على متغير يبقى هو هو بعينه فى القضيتين وحيث لا تشتمل على ثوابت غير ثوابت المنطق».

ونقول الآن إن مثل هذا التعريف يبرز الخصائص الآتية : الرياضة «صورية» و«قَبْلية» و«استنْباطية» مما يؤكد كون موضوعات الرياضة ليست بالضرورة كميات تتعلق بالمكان والحركة والزمان، وما استبعاد الكم على هذا النحو إلا النتيجة الحتمية للتطور الذى وصفناه للرياضة نفسها عند أصحابها فى غضون القرن الماضى من «تحسيب» للرياضة استبعد الحدس فى كل صوره وخاصة المكانية. ثم من امتداد لفكرة العدد لتشمل اللامتناهى **(كانتور)** وأيضا من أكسيوماتيك للعدد أحاله إلى قضايا منطقية **(بيانو)** وأخيرا من نقائض رياضية احتاجت إلى حلول منطقية .

هذه التطورات المتلاحقة فى اتجاه نحو المنطق بالذات هو الذى هيّأ تماما إلى التحام الرياضة بالمنطق والتوحيد بينهما فى نسق موحَّد عند راسل. وفى نطاق هذا النسق الموحد إذا شئنا إن نعرف كلا منهما على حدة، فلا نجد إلا عبارة **راسل** الأخرى التى تقول : «إنهما لا يختلفان إلا كما يختلف الصبى عن الرجل» فالمنطق هو

صبا الرياضة والرياضة رجولة المنطق». ذلك لأن النسق الموحد يبدأ بحساب القضايا الأولية ثم يتدرج منه إلى حساب القضايا الحملية وعندما ينتقل إلى حساب الفئات وحساب العلاقات يتدرج دون أدنى فجوة أو قطع إلى تناول الحساب العددى منتقلا منه إلى بقية فروع الرياضة كما نسقها المذهب الحسابى الذى له الفضل الأول فى إمكان تسلسل الرياضة كلها إبتداء من العدد الصحيح، وإذن فنحن هنا لا نستطيع أن نقول أين انتهى المنطق وأين ابتدأت الرياضة؟ .

إن السؤال الأول والهام الذى نبدأ منه فهم هذه النظرية هو، هل التعريف الذى بدأنا منه للرياضة صادق؟ هل يمكن تعريف الموضوعات الرياضية كلها بواسطة ثوابت المنطق واشتقاق قضايا الرياضة من قوانين المنطق وحده؟

هذا السؤال الهام - بفضل النتيجة التى وصل إليها المذهب الحسابى فى رد الرياضة إلى العدد الصحيح - يمكن أن يُردَّ عند اللوجستيقيين إلى سؤال أبسط منه وهو : هل يمكن رد الحساب إلى المنطق، أى تعريف الأعداد بواسطة ثوابت المنطق؟ هذا تبسيط كبير للسؤال الأول يسره ووطأه المذهب الحسابى نفسه. فلنبدأ إذن من *الأعداد ولكن أى أعداد؟*

إن سلسلة الأعداد الطبيعية التى يعتبرها الرياضيون أساس

البناء الرياضى كله، هى تلك العملية التى لا تنتهى لمتابعة أعداد صحيحة منتهية تبدأ بالصفر ثم بالواحد الخ... إن الصفر لم يكن عددا حتى اكتشفه **الخوارزمى** . والقدماء لم يعتبروا الواحد عددا، **فأفلاطون** يبدأ العدد من ٢ وكذلك **أرسطو**، لأنه يوحد بين الموجود والواحد، فيقول إن الواحد مساوق للموجود، أو اسم آخر له يمكن أن يتبادل معه فهو ليس عددا. وبعض المحدثين ينكرون أيضا كون الصفر عددا. ولكن ليس هناك أدنى صعوبة الآن فى أن نعتبر مع اللوجستيقيين أن سلسلة الأعداد تبدأ بالصفر ثم تتدرج إلى الواحد الخ..

من جهة أخرى كل واحد من تلك الأعداد البادئة من الصفر يمكن أن نعتبره إما معبرا عن عدد الأشياء وأما معبرا عن ترتيب الأشياء أو درجتها فى داخل سلسلة. والاعتبار الأول هو الأهم والأولى، لأن ترتيب الأعداد أو مكانتها داخل سلسلة ما إنما هو عملية تالية لإدراكنا الأعداد كلها على حدة. إذ يجيء بعد ذلك ترتيبها حسب الأكبر والأصغر والمساوى. وإذن فالأعداد المسماة المرتبة (Ordinal) إنما تأتى بعد الأعداد المسماة الأساسية أو العادة (Cardinal) ومن ثم يتحول السؤال السابق المبسط عند اللوجستيقيين إلى سؤال أخير محدد هو : هل يُرد العدد العاد إلى المنطق ؟

لنرجع الآن إلى تلك الفترة التى نشأ فيها هذا السؤال عند **فريجه** فى العَقدين الأخيرين من القرن الماضى.

فى ذلك الوقت كان يرى بعض الرياضيين أن التساؤل عما هو العدد الذى انتهى إليه المذهب الحسابى تساؤل غير مقبول، لأن العدد واضح وحدسى وربما لا سبيل إلا إلى القول بأنه هبة من الله **(كرونكر)** .

رياضيون آخرون قالوا إن الأعداد مجرد رموز أو علامات (Signs) وهى إما علامات لإجراء عمليات حسابية فتسجل الأعداد نتائج العمليات (**هاينكل** Haenke) وإما علامات لا معنى لها إطلاقا ولا تزيد على مجرد كونها علامات وحسب **(الاسميون)**.

آخرون قالوا إنها موضوعات سيكولوجية، أي معبرة عن عملية تجريد سيكولوجى من مواقف تجريبية بحتة فتكون الأعداد منتزعة مباشرة من تجاربنا.

أما **فريجه** وهو أول اللوجستيقيين فيقول إنها موضوعات منطقية صرفة.

فيما يختص بالنظرة الأولى القائلة بأن الأعداد واضحة إلى حد أنه لا يجب إثارة سؤال عن طبيعتها فهى نظرة يرفضها الواقع التاريخى القريب للرياضة حيث أن الرياضيين رأوا ضرورة متابعة

تحليل فكرة العدد (عند الأكسيوماتيكيين مثلا) إلى مسلمات تنتجها.

أما فيما يختص بالاسميين Nominalistes الذى اعتبروا الأعداد مجرد علامات أو ترقيمات. نقول إنهم بذلك يتكلمون عن أشياء لها خصائص هى قطعا غير خصائص الأعداد. فالعلامات المبصرة من حيث هى كذلك هى من عالم الأشياء الطبيعية والكيميائية. فهى ترسم على أنحاء مختلفة باختلاف اللغات. وتكتب وتمحى وترفع وتوضع وتجمع وتفرق إلى آخر ما هنالك خضوعا لقوانين الطبيعة والكيمياء مما يخلو قطعا من الخصائص المميزة للأعداد ذاتها، كخاصية كون العدد دائما هو هو رغم اختلاف علاماته. وكخاصية كونه فى ذاته علاقة ثابتة بالنسبة لما قبله ولما بعده، بينما العلامة لا تتضمن تلك العلاقة . وكخاصية ثبات هويته عند دخوله على أنحاء لا تنتهى فى التركيبات العددية. وإذن فرغم أن اختيار علامات الأعداد هام فى الرياضة، إلا أنه يجب ألا نخلط بين العدد وهو معنى وبين كتابته أو علامته المادية .

كذلك يجب ألا نخلط بين ذلك المعنى الذى ميزناه وبين الأفكار السيكولوجية التي تثار فى ذهن الفرد عند مشاهدته للأشياء المتجمعة فى فئات أو عند رؤيته بالعين العلامات العددية المكتوبة. إن تلك الأفكار السيكولوجية حالات ذاتية وتختلف من فرد إلى آخر ومن

لحظة إلى أخرى، ومن ثم فليست الأعداد ظواهر نفسية وكيفيات سيكولوجية نظرا لما فيها من دقة وموضوعية .

وإذن فلم يبق إلا أن ننسب الأعداد إلى نوع رابع من الأمور غير ما تقدم ذكره أعنى إلى «الصور المنطقية» وهذا بالضبط هو ما أبرزه فى آن واحد تصور العدد عند **جورج كانتور**، وتعريفه عند فريجه ثم عند **راسل**، إذ يكاد يتفق الثلاثة على تعريف واحد للعدد .

إن فريجه المنطقى الذى عاصر **كانتور** الرياضى ولم يطلع عليه، كان على علم بتمييز تقليدى فى المنطق بين المفهومات أو المقصودات الأوائل وبين المفهومات أو المقصودات الثوانى : مثلا عندما أتصور إنسانا أو مثلثا أو حركة فهذه التصورات مفهومات أوائل أى معبرة أو دالة على تلك الأشياء التي يتصورها الفهم بداءة. ولكن إذا قلت عن تلك المفهومات إنها أجناس أو أنوا ع أوكليات أو جزئيات أو تصورات أو قضايا فهذه أوصاف لاحقة للمقصودات الأوائل ومن درجة ثانية بالنسبة إلى الأشياء وليست معبرة أو دالة عليها. هذه هى المقصودات الثوانى التى هى موضوع المنطق بالذات .

وكذلك الشأن فى العدد عند **فريجه**، فالأشياء متفرقةً ومجتمعةً لها معانيها الأوائل المباشرة. فمثلا هذا إنسان وتلك شجرة الخ.. ولكنها فى انفرادها وفى تجمعها لها صفات أخرى غير مفهوماتها الأوائل

وتلزم عن نظرنا فى صفة ما مشتركة من صفات مفهوماتها. تلك مفهومات أخرى غير مفهوماتها الأوائل نلتفت إليها بعقلنا ونصل إليها بعملية تجريد عقلى وتلك هى أعدادها. فالأعداد ليست تصورات مباشرة أو أوائل وإنما هى تصورات من درجة ثانية عن تصورات مباشرة، هى إلتفات أو تجريد لصفات مشتركة بين تصورات أوائل، إذ يجب أن تكون هناك أولا تصورات الأشياء المتفرقة والمجتمعة فى فئات لكى تكون هناك بعد ذلك تصورات عددية للفئات .

إنه ابتداء من وجهة نظر كهذه توصل أيضا **جورج كانتور** فى نظريته فى «المجاميع» إلى فهمه للعدد كأسس أو قوى (Powers, Puissance) فحسب بالنسبة لتصورات الأشياء. أعنى كتصورات كلية تكونت بالتجريد العقلى لصفة ما عندما تجتمع الأشياء فى فئات أو مجموعات . وبالطبع مجموعات كثيرة مختلفة يمكن أن تؤدى بمثل هذا التجريد إلى نفس التصور الكلى أى نفس العدد عندما «تتساوى» المجموعات فيما بينها، أي عندما نلتفت إلى صفة مشتركة ومتماثلة كالمساواة القائمة بين مختلف تصورات الفئات المعروضة علينا. هذا هو تصور **جورج كانتور** للعدد حيث نلاحظ أن تصوره للعدد كأسس أو قوى، هو عين تصور **جوتلوب فريجه** للعدد كمقصود ثان، أى كتصويت مجرد عن تصور أول .

بهذه المناسبة وقبل أن ننتقل إلى **راسل**، نتوقف قليلا عندما يسمى التعريف بالتجريد Definition by Abstraction الذى يكمن وراء تلك الآراء، ويؤدى إلى هذا التصور للعدد كمقصود ثان أو كأسس وقوى. فهناك من أنواع التعريف الممارسة في العلم والرياضة ما يسمى بهذا الاسم. وبمقتضاه نعرّف الأشياء مهما اختلفت وتضاربت بواسطة صفة مشتركة بينها نلتفت إليها ونعزلها عزلا عقليا لأغراض العلم، فقد يختلف جسمان فى حجمهما وشكلهما ومادتهما ولكنهما «يتساويان» وزناً فبعزل صفة المساواة أو بتجريدها نقول إننا نعرفهما بالتجريد. مثال آخر للتعريف بالتجريد ما قبله **أقليدس** فى مسلمته الخامسة، فقولك الخط **أ** يوازى الخط ب إنما معناه إننا حددنا أو عرفنا الخطين بأن انتزعنا معنى جديدا مشتركا هو أن اتجاه **أ** يساوى اتجاه **ب** . وبذلك تكون مسلمة **أقليدس** تعريفا بالتجريد.

إن التعريف بالتجريد متصل بتحليل «العلاقة» Relation وبتعريف العدد عند **راسل**. فهو يسمى «علاقة متعدية» Transitive Relation تلك العلاقة التى إذا فرضنا قيامها بين **أ . ب . ج** فإنها تقوم كذلك بين **أ . ج**، ومثل هذه العلاقة أعم من علاقة «المساواة» Equality وتشملها . مثلا علاقات أبٍ أو ابن أو «أكبر من » كلها

علاقات متعدية، ولكنها ليست كالمساواة قابلة للانعكاس أو للرجوع على الأعقاب. مثلا إذا كان **أ** أباً لـ **ب** فإن **ب** ابن لـ **أ** وليس أبا له. بينما المساواة قابلة للعودة أو الانعكاس فهى علاقة سيمتيرية أو متسقة Symetrical كما يصطلح **راسل**. إذن المساواة هى فى آن واحد علاقة متعدية وسيمترية. إن العلاقة التى تجمع فى آن واحد التعدى والسيمترية يسميها **راسل** التماثل أو التشابه Similitude. ولهذا اللفظ الذى يظهر فى حساب العلاقات أهمية خاصة فى تعريف **راسل** للعدد بما لا يخرج جملة عن تصور **فريجه وكانتور**. ونحن نثبت فيما يلى تفكير **راسل** برموزه بين قوسين كبيرين لأنها مسألة فنية بحتة يمكن للقارىء إغفالها.

(إذا فهمنا هذه الإشارات السريعة ثم وضعنا نصب أعيننا الرموز الآتية التى يستعملها راسل فى تعريفه للعدد وهى :

NC **الأعداد العادة**

Nc **العدد العاد**

Cl **فئة**

Sim **تماثل – مشابهة**

D **هو هو بعينه**

فإننا نقول إن **راسل** الذى تأثر **بكانتور** يرى مثلا أن العدد «ثلاثة»

هو فـئـة Ci ولكنه ليس فـئة لأشـيـاء. أى ليس منتـزعـا مبـاشـرة من الأشياء بحيث يكون المقصـود الأول منها، وإنما هو فئة لفئات كثيـرة متشابـهة Sim فيما بينها بالثلاثية. بعبارة أخرى نعرف العدد ثلاثة بالتـجريد لفـئة مشـتركـة أو متـمـاثلة بين فـئـات كثـيرة وهذه الفـئة المتمـاثلة هـى علاقـة مـتعدية سـيمترية. إذن العدد ثلاثة هو فـئـة كل الفئات المماثلة لـ a مثل الفئة B فيكتب بالرمز

$$Ne \text{ ‘a’} = B (\hat{B} \ sma)$$

يجىء من هذا التـعريف الآتى لأى عدد منفـرد (ونحن نذكـر رقم القضية فى كتابه بالاشتراك مع **هويتهد**) .

$$.\ 100.01 \qquad Nc \qquad = \overrightarrow{sm} \qquad Df.$$

الذى يقول إن أى عدد عاد هو بالتعريف فئة الفئات المتماثلة

(Cardinal number is a class of Classes Similar to one Another)

ثم يجىء التعريف الآتى للعدد العاد جملة

$$.\ 100.\ 02 \qquad NC = D' \ Nc \qquad Df.$$

وفـئـة العدد العـاد جملة هـى فـئـة لجـمـيع الأعداد العـادة المنفردة ولذلك نقرأ التعريف كما يأتى :

فـئـة الأعـداد العـادة NC إنما هـى فـئـة لفـئـات (D) كل الفـئـات المتماثلة Nc .

(The Class of Cardinal numbers is the Class of the Classes which are Similar to one another).

إذن هناك أولا فئات الأشياء، ثم هناك فئات أو أعداد منفردة لتلك الفئات الأولى، ثم أخيرا هناك فئة عامة لكل تلك الأعداد وهى سلسلة العدد العاد.

ثم ينتقل **راسل** بعد ذلك إلى تعريف الصفر فالواحد ثم الجمع والضرب، فتتكون بذلك سلسلة الأعداد العادة. وفيما يختص بالعددين المذكورين يعطى **راسل** التعريفين الآتيين بالرموز ونحن نترجمها كما يأتى :

الصفر هو الفئة التى عضوها الوحيد هو فئة الخلو (Nul class).

الواحد هو فئة كل الفئات ذات العضو الواحد .

ثم يبرهن **راسل** على عدد كبير من قضايا الحساب على أساس عمليتى الجمع والضرب المستمدين من مقابلهما فى الحساب المنطقى (الوصل والفصل) ،ثم يتدرج بعد ذلك إلى استنباط كل فروع الرياضة وقضاياها كما وردت مسلسلة فى المذهب الحسابى الذى له الفضل فى تيسير مهمة اللجوستيقيين .

والآن دون أن نسترسل إلى أبعد من هذا فى تقصى موقف **راسل** فى اشتقاق الرياضة الذى طابعه الأول الدقة الفنية مما يتجاوز حدود

عـرضنا هذا، نود أن ننتـقل فـورا إلى مناقـشـة قـيـمـة الموقف اللوجستيقى .

وأول كل شىء ننبه إلى أن التعريفات المتتابعة فى هذا المذهب لها أهمية كبرى تفوق أهمية اشتقاق النظريات كما يشهد بذلك تعريف العدد أو أى ثابت منطقى آخر عما ذكرنا نموذجا له. ومن ثم يجب أن نلاحظ ما يأتى على التعريفات .

أنها تبدو فى بادىء الأمر ذات قيمة فنية بحتة، لأن وظيفتها إنما هى إدخال رمز مختصر جديد هو «الحد» الذى يراد تعريفه بدلا من مجموعة مطولة من الرموز التى سبقت معرفتها فى النسق نفسه وهي التعريف .

ولكن فى حـقـيـقـة الأمـر إذا نظرنا إلى التـعـريفـات من جـهـة مضموناتها أو معانيها، فإنها تصبح ذات أهمية أبعد خطرا سواء من حيث توكيدها لأهم المعانى أو الأفكار التى يدور حولها النظر فى النسق المنطقى الرياضى الموحد، أم من حيث تحليل تلك المعانى أو الأفكار التى يجملها الرمز الجديد تحليلا دقيقا محددا لا نحصل عليه فى أى قاموس أو علم آخر وذلك كما تشهد به الرموز المطولة التى تعرف الرمز الجديد وتضع تحليلا لمعناه .

وإذن – ففلسفياً – التعريفات هنا ذات أهمية كبرى فى حين أن استنباط القضايا أو النظريات الرياضية هو أمر أقل أهمية فلسفيا

بل وفنيا إذ قد ذلل ذلك الأمر وعبّد طريقه من قبل المذهبُ الحسابى الذى سلسل قضايا الرياضة تسلسلا بديعا ونهائيا .

وحتى إذا كان هناك خطأ ما فى استنباط قضية رياضية فى نسق راسل فإننا نستطيع أن نطمئن إلى صدق القضية ذاتها استنادا إلى المذهب الحسابى. على كل حال استنباط القضايا أقل أهمية من تعريفات النسق الجديدة التي تعبر بلغة المنطق عن أمور لم تكن فى المذهب الحسابى منطقية أو صورية .

هذا ثم إن الاختيار الحر من بين الرموز الكثيرة الواردة فى النسق لطائفة محددة محصورة نعرف بها رمزا جديدا (الحد الذى يطلب تعريفه) هو أمر أكثر من مجرد عمل قاموسى إذ هو أعسر عمل فى تكوين النسق الاستنباطى من حيث أن ذلك الاختيار إنما يتطلب تبصرا نافذا بموضوعات النسق وفهما دقيقا لأهدافه ولأحسن الطرق المحققة لها .

وهنا أيضا نلاحظ أن كل تعريف جديد من التعريفات المتتابعة فى داخل النسق إنما هو أمر يحدد بالدقة المرحلة التى وصل إليها النسق فى طريقه الطويل نحو هدفه.، كما خير وصف لذلك الطريق الطويل فى أية مرحلة من مراحله إنما هو معرفة التعريف الذى يميز تلك المرحلة بحيث نحسم فى كل مسألة تثار إذا كان يمكن أن تجاب إيجابا أم سلبا فى حدود مرحلة معينة من التعريفات.

كل هذا الكلام فى إبراز أهمية التعريفات فى النسق الموحد هو لتركيز الانتباه فى أهمية تعريف العدد الذى جاء به **راسل** فى النسق اللوجستيقى والذى سبق ذكره فالمسألة الآن هى هل هذا التعريف للعدد الذى بواسطته انتقل النسق الموحد من المنطق إلى سائر أجزاء الرياضة يقبل التبرير فيصبح منطقيا أو فلسفيا غير قابل للطعن أو الرفض وأنه يطابق الموضوعات المعروفة في الرياضة باسمه وأنه لا يطابق إلا هذه الموضوعات وحدها؟

فيما يختص بالتعريف الأخير الخاص بالعدد العاد فى عمومه (المرقوم برقم **100. 02**) من العسير أن يتردد أحد فى قبوله لأنه يؤكد بكل بساطة أن فئة العدد هى فئة جميع فئات الأعداد العادة.

أما فيما يختص بالتعريف الأول (المقوم برقم **100. 01**) فقد وجهت إليه اعتراضات نناقشها الآن لنتبين مدى إمكان تبرير التعريف .

فابدأ أولا بالقول بأن الرياضى **هاوسدورف** (Hausdorff) قال إن تصور فئة لكل الفئات الخ.. هو تصور غير مقبول لأنه يقود إلى تناقض منطقى معروف هو أن مثل هذا التصور يشمل نفسه أو مدلوله كجزء من نفسه إذ أن «فئة» لكل الفئات هى نفسها عدد أيضا. لقد رأينا أن لمثل هذا الاعتراض نظيرا عند **راسل** على نظرية

جورج كانتور، ولذلك نتركه هنا لمن ينظر فى حل نقائض تلك النظرية الرياضية فهناك نجد المحاولات المختلفة لتخطى تلك العقبة.

ثانيا يعترض الرياضى **مولدرب** Molderup فى مقال له فى الحولية الرياضية Math . Annal بأن ذلك التعريف متناقض فى ذاته من حيث أنه يجعل العدد ١ هو فئة كل الأشياء فى الوجود. بمعنى أنه يندرج تحته *كل شىء* من حيث *أنه* مفرد. *ولكن لا أرى فى ذلك* أى تناقض، فإن أرسطو كما رأينا جعل الواحد مساوقا للموجود. ويتبادلان (أى الواحد والموجود) بذلك الدلالة على الشىء الموجود ولم يطعن أحد بتناقض **أرسطو** .

ثالثا يعترض الرياضى **ڤيلشتاين** Welstein فى دائرة معارف الرياضة (١٩٠٩) بأن عدد فئة ما، لا يمكن أن يعتبر فئة كل الفئات المماثلة لفئة ما من حيث أن هذه الفئة الأخيرة غير معروفة لنا. وهنا نلاحظ أنه ليس ضروريا أن نعرف كل أعضاء فئة ما لكى نصل إلى تحديد أو تعريف تلك الفئة. وكل ما نحتاج إليه هو أن تكون لدينا وسيلة أو طريقة لنقطع فيما إذا كان موضوع ما هو عضو أم لا لتلك الفئة؟ مثلا فئة الشكل الكثير الأضلاع هى منطقيا فئة يمكن تبريرها تماما من حيث أن تعريف الشكل الكثير الأضلاع يمدنا بوسيلة أو طريقة لنبت فى أية لحظة فيما إذا كان موضوع ما هو كثير أضلاع

أم ليس كذلك. إذن فالاعتراض المذكور يتبدد لأن تعريف العدد يعطينا طريقة للبت فيما إذا كان أمامنا عدد دون أن يعين عددا بالذات من الأعداد الفردية. إذ أن هذه تأتى تعريفاتها بعد ذلك فيما وضحنا ذلك فيا يختص بالصفر والواحد .

هذه اعتراضات وجدناها فى طريقنا على تعريف **راسل** ونتبين من مناقشتها ما يبرر تماما تعريفه للعدد. كما وجدنا أيضا ما يبرر اتجاهه هذا فى تعريف العدد من قبله عند **كانتور** وعند **فريجه** .

ولقد قصدنا إبراز الأهمية الفلسفية لتعريف العدد بالذات فى النسق اللوجستيقى وكذلك التعريفات الأخرى. لأنه إذا كانت هناك أهمية خاصة نعلقها على ما أنجزه هذا النسق من تقدم، فإن هذه الأهمية لا تستمد من اشتقاق النظريات الرياضية بالبرهان، فهذا الاشتقاق كما قلنا كان قد يسره وعبّده المذهب الحسابى من قبل. وكل ما أضافه المذهب اللوجستيقى هنا هو تعبيره بثوابت المنطق أو صوره عما كان معبرا عنه فقط برموز الرياضة، في حين قد بقى تسلسل قضايا ونظريات الرياضة بعضها من بعض على النحو الذى تركه عنده المذهب الحسابى. لكن لم يكن يتيسر هذا التعبير المنطقى للرياضة إذا لم يوفق المنطق إلى تعريفاته الجميلة المتلاحقة التى بها يتمثل المنطق كل تصورات الرياضة ويذيبها فيه وعلى رأسها تعريف

العدد الذى وقفنا عنده لأهميته لأنه القنطرة التي يعبرها المنطق إلى سائر أجزاء الرياضة. ومن ثم نرى أن التعريفات اللوجستيقية وهى من عمل اللوجستيقا لا من المذهب الحسابى إنما هى الأمر الهام «علميا» فى هذه الفلسفة العلمية التى تبطن وراءها فلسفة كاملة هى أن الرياضيات من طبيعة منطقية وحسب، وليس لها مادة مستقلة عن ثوابت المنطق أو صوره .

(٢٦)

نريد أن نلقى الآن نظرة سريعة على المذهب الأكسيوماتيكى الذى هو رد فعل مباشر على المذهب اللوجستيقى من إمام الرياضة المعاصرة **ديفيد هلبرت** الذى كان أستاذا بجامعة برلين حتى قبيل اندلاع الحرب العالمية الثانية، وهو لا يرى أن الرياضة فرع من المنطق ومشتقة منه كما انتهى إليه اللوجستيقيون وإنما يرى أن المنطق والرياضة نبعا كلاهما متوازيين عن نبع واحد أسبق منهما هو الطريقة الأكسيوماتيكية (Axoimatic Method) أو كما يقال أحيانا نبعا عن صورية خالصة (Pure Formalism) هى الأساس المشترك والبعيد لهما معا. ولبيان ذلك نقول إنه لكى تستقيم الرياضة والمنطق معا كعلمين استنباطيين (Deductive Sciences) وثيقين، يجب

الذهاب إلى ما هو أبعد من حدودهما ومسلماتها الأولية التى وصلت إليها الأبحاث السابقة عند **بيانو وفريجه وراسل**، ومَن مهد لهم فى تحليل الرياضة والمنطق إلى حدودهما ومسلماتها الأولية من أمثال **مورتز باش وبديكند** وغيرهم.

وهذا الذهاب إلى ما وراء الحدود والمسلمات الأولية فى المنطق والرياضة كلاهما، إنما ينتهى إلى - أو على الأصح يبدأ - من قبول حدود ومسلمات أولية أخرى عارية من كل معنى سواء فى الرياضة أم فى المنطق أنها مجرد رموز نضعها وضعا ومن ثم فى صورية بحتة لا تتضمن معنى ما. وتلك الحدود والمسلمات التى لا هى إلى الرياضة ولا هى إلى المنطق هى التى تسمى «الأكسيوماتيك» الذى تُشتق منه بالتوازى وفى آن واحد، الرياضة والمنطق منفصلين .

ولوضع الأكسيوماتيك على طريقة **هلبرت** شروط هامة مشهورة أجملنا ذكرها فيما سبق أن قلناه عن شروط تأسيس المسلمات فى الهندسة، وهي شروط الاستقلال والإشباع وعدم التناقض التى لا تزال قيد الدراسة ولم تصل فيها الأبحاث بعد إلى قول فصل .

ولما كان الأكسيوماتيك وما يثيره من أبحاث فى شروط وضعه من الأمور التى لا تدرس فى كل من المنطق والرياضة ولا يدخل فى موضوع أى منهما، فقد اصطلح **هلبرت** على تسمية كل تلك الأبحاث

الأكسيوماتيكية بما وراء الرياضة (Metamathematics) تارة وبما وراء المنطق (Metalogic) تارة أخرى، فتكوّن بذلك علم أو بحث جديد يجتذب الباحثين ويمهد للدراسات المنطقية والرياضية معا .

ولابد أن نلاحظ أن هذه النظرية الأكسيوماتيكية من حيث هى «صورية» تتفق - أو بتعبير أصدق - تتجاوب مع حركة عامة مضاهية لها فى العلوم الطبيعية نحو تجريد أكبر وصورية متزايدة يصحبهما ليس فقط دقة فى التحقق التجريبى من النظريات العلمية بل كذلك عدم معقولية متزايدة للتصورات المستعملة فى العلم. فالطبيعيات الحديثة لا تميل إلى تفسير العالم ولا إلى أن تصفه، وإنما بدلا عن ذلك كله تهدف إلى استعراض بنيانه فقط (Structure) باستعمال الرموز التى لا معنى لها، أى لا تعقل وهى منفصلة بعضها عن بعض بقدر ما تعقل فقط عند الارتباط بعضها مع البعض فى معادلات تبين استعمالها وبالتالى معانيها.

إن هذا الميل المتزايد من علماء الطبيعة نحو الاهتمام بالبنيان الرمزى للعلم وما تتضمنه الاقترانات المختلفة للرموز من معان، له صداه أو قل له شبيهه عند **هلبرت** وتلاميذه من الأكسيوماتيكيين المعاصرين الباحثين فى أسس الرياضة .

إن هذا المذهب - مذهب الصورية البحتة - هو مسألة فنية صرفة



أولا، ثم هو بعد ذلك فلسفة أن استطعنا أن نسمى فلسفة القول المجمل بأن هناك أصلا مشتركا للمنطق والرياضة معا. أما بيان ذلك الأصل المشترك فهو المسألة التى وصفناها بأنها فنية صرفة. وبرنامج هذه المسألة الفنية يبدأ بإقامة نسق رمزى من الحدود والمسلمات الأولية تشتمل على رموز للدوال الرياضية والأعداد كما تشتمل على رموز لثوابت وقوانين من المنطق .

ويبدأ النسق بحساب للقضايا يستعمل الرموز التي عرفناها عند **راسل** مع مسلمات للتضمن والوصل والفصل والنفى والمساواة والعدد. ولقد جاء عدد تلك المسلمات كبيرا جدا بالقياس إلى مسلمات منطق **راسل** التى سبق ذكرها، وسبب ذلك أن مسلمات النسق الجديد إنما قصد بها شيء أكثر من مجرد إقامة المنطق وحده إذ يجب أن يحسب فيها حساب الأعداد أيضا .

ويجب أن نلاحظ أن هذا المذهب أكثر صورية فى الواقع من المذهب اللوجستيقى، لأنه يبدأ من مسلمات «اسمية» بحتة، أي مجرد رموز لا تعنى المنطق أو الرياضة. ولكنه مع ذلك لا يختلف كل الاختلاف عن المذهب اللوجستيقى كما أراد له صاحبه **هلبرت**، إذ هو فى الواقع يكمله ويزيد من دقته، لأنه لم يفعل إلا أن أوضح إمكان الذهاب فى تكوين الحدود والمسلمات الأولية إلى ما وراء المنطق. ذلك

المنطق الذى وقف عنده **راسل**.

هذا ثم إن الأكسيوماتيك كما نراه عند **هلبرت** وتلاميذه يحتاج إلى قدر من المنطق قبل أن تستنبط منه قوانين المنطق، لأن أحد شروط تأسيسه هو أن لا تتناقض المسلمات فيما بينها، وعدم التناقض هذا من أهم قوانين المنطق. فالمنطق إذن مفروض مقدما فى كل محاولة أكسيوماتيكية من هذا النوع، ولذلك يرى المنطقيون أن هذا المذهب مكمل فقط للمذهب اللوجستيقى ومعمق له.

لكن هناك أيضا إعتراضات وجيهة على هذا المذهب يقول أحدها: إن هذا المذهب بدلا من أن يعالج مسألة عدم تناقض الرياضيات مباشرة، أعنى بدلا من معالجة نقائض الرياضة الحديثة فى نطاق الرياضة القائمة فعلا، اتجه إلى اختيار مسلمات بعيدة تنتج الرياضيات والمنطق سويا، بينما هى لا معنى لها فى ذاتها لأنها مجرد رموز خاضعة لقوانين اقتراناتها التى تحددها المسلمات. كما أن مجرد اختيارها دون غيرها تظل مسألة غيبية وربما ترجع إلى حد رياضى بعيد أملى ذلك الاختيار دون غيره فى الوقت الذى تريد فيه الصورية البحتة لكى تبرر اسمها، أن تستبعد احتمال دخول أى حدس فى الفكر الرياضى والقضاء على مجرد إمكان ظهوره.

(٢٧)

بقى التيار الثالث المعاصر فى مشكلة أسس الرياضة وهو المذهب الحدسى (Intuitionism) أو المذهب الحدسى الجديد (Neo - Intui-tionism) الذى يعتنقه رياضيون من أمثال **بروور** Brouwer **وفايل** Weyl **وهيتنج** Heyting فى ألمانيا وجيل أقدم منهم من أمثال **بوانكاريه** Poincare **ولوبيج** Lebesge **وبير** Baire فى فرنسا، وغير هؤلاء ممن ائتلفوا على معارضة المذهب اللوجستيقى وحده (مثل أولئك الرياضيين الفرنسيين الذين ذكرتهم) أو على معارضة المذهبين اللوجستيقى والأكسيوماتيكى معا (مثل هؤلاء الرياضيين الألمان الذين سبق ذكرهم) .

وهو مذهب لا يمكن إغفاله رغم أنه رياضى بحت، لأنه مذهب فريق من أجلاء الرياضيين المعاصرين، الذين يعنيهم الأمر فى كل بحث يدور حول علمهم الرياضى العريق. ولأنهم يعودون بعلمهم إلى أصول غير منطقية هى الأصول التى كانت (من قبل حركة النقد الباطنى التى طردت كل حدس من الرياضة) من تقاليد الرياضة فى عصور نموها عبر القرون .

وهم فى جملتهم يعنون «بالحدس» لا البداهة الديكارتية وإنما المعنى الكانطى للكلمة، أى تلك التجربة الحسية أو الذهنية التى

يبيحها المكان والزمان، وهى التجربة التى تقابلها وتناظرها التجربة المعملية فى العلوم الطبيعية. فهم إذن رياضيون يقولون إن الرياضة لها «مادة» معينة وإذن فهى ليست صورية بحيث تشتق من المنطق الصورى، وإن تلك المادة إنما تحتاج إلى تجربة من نوع خاص هى الحدس الرياضى. ذلك الحدس التجريبى القبلى الذى هو السبيل الوحيد إلى الكشف الرياضى وإلى تأسيس الرياضة كعلم أصيل مستقل عن المنطق والأكسيوماتيك معا. وما المنطق والأكسيوماتيك فى نظر هؤلاء إلا الوسيلة العلمية اللاحقة «لاستعراض» أو «شرح» أو «بسط» تلك الكشوف والتجارب الرياضية الأصيلة فى صورة واضحة يفهمها الآخرون الذين لم يكتشفوها . فهناك إذن فرق واضح بين مناهج الرياضة وبين عرض الرياضة وتقديمها إلى الآخرين. فالمنابع تجريبية أى حدسية أما العرض اللاحق للتجربة أى للحدس فهو منطقى أو أكسيوماتيكى .

هذا هو المذهب الحدسى كما يستخلص من فلسفة قدماء الحدسيين من أثمال **كانط** و **بوانكاريه** وغيرهما مما يطلق على مذاهبهم «المذهب الحدسى» وحسب.

أما المذهب الحدسى الجديد فهو مذهب المعاصرين **برور وفايل وهيتنج** الذين تعمقوا فكرة الحدس الرياضى بحيث أخرجوا من

الرياضة كل ما لا ينبىء عنه ذلك الحدس، كما تجنبوا فى علمهم كل النقائض (Paradoxes) والأخطاء التى وقعت فيها الرياضة الحديثة بسبب الحدث نفسه. فأعطوا كلمة الحدس معنى خاصا وضيقا يميز مذهبم «الحدس الجديد» عن المذهب الحدسى عامة. ومذهبهم فيه قلق مبهم، ويختلف من مؤلف إلى آخر فلا توجد له وحدة بينهم إلا فى القول الغامض بأن «الرياضة متحدة بالجزء المضبوط للفكر» (Math-ematics is identical with the exact part of our thought).

وهم يقصدون بهذا أن الفكر إذا كان أحيانا «مضبوطا» بالغ الدقة فهذا هو موضوع الرياضة وموضع الحدس الرياضى. فهم إذن يواجهون الرياضة من زاوية سيكولوجية ويقرّبون من موقف **كانط** والحدسيين جملة من جهة اختلاط الرياضة بمادة فكرية ما.

وإذا كانت الرياضة عندهم هى الجزء المضبوط من الفكر فهى لا تفترض كأساس لها أى علم آخر حتى ولو كان ذلك العلم هو المنطق كما يريد اللوجستيقيون. وهؤلاء اللوجستيقيون واقعون فى خطأ الدور، حين يدعون تطبيق نظريات المنطق كوسيلة للبرهان فى الرياضة ذلك لأن تلك النظريات كما يتضح من المنطق فى صورته اللجوستيقية أو الأكسيوماتيكة هى نفسها محتاجة فى تكوينها إلى تكوين الرياضة أولا، لأنها تحتاج إلى فكرة الفئة (Class) وفكرة

الترتيب (Order) وما ينشأ عنها من تسلسل الأعداد وغير ذلك من الأفكار الرياضية. وإذن إذا كانت الرياضة بهذا المعنى أولى وغير مقيدة بأى علم آخر حتى و لو كان المنطق نفسه، فلا يبقى من منبع لها غير «الحدس» الذى يقدم لنا التصورات الرياضية والاستنباطات الرياضية كأمور أصيلة مباشرة واضحة فى ذاتها. وهذا الحدس إن هو إلا المقدرة على معالجة بعض تصوراتنا واستنباطاتنا التى تُحدث فى تفكيرنا العادى معالجة منفصلة (Separate) ومضبوطة (Exact) ودقيقة .

تلك الكلمات التى وصفنا بها المذهب الحدسى الجديد مقتطفة من **هايتنج** (A,Heyting فى بحث له فى مجلة Erkenntnis سنة ١٩٣٢ بعنوان الأسس الحدسية للرياضة) الذى يضيف أيضا كخاصية من خواص المذهب الحدسى الجديد أن الأمور التى هى موضوع الرياضة هى أمور مستقلة عن التجربة الخارجية (الحسية) كما أنها ليست صورية بالمرة. ولكنها مع ذلك أمور «موضوعية لا توجد مع ذلك إلا فى الفكر» .

بعد هذه اللمحة فى طبيعة هذا المذهب نلاحظ أن تطبيقه أدى بمعتنقيه إلى نتائج مؤسفة للغاية فى نظر بعض الرياضيين والفلاسفة، ووخيمة العاقبة على علم كالرياضة ذى تاريخ حافل

مـجـيد، فـقـد بدا هذا العلم منذ مـجـهودات المذهب الحسـابى علماً استكمل تنسيقه ووحدته. ولكن أنصار هذا المذهب الحدسى الجديد قطّعـوا أوصـاله بعـد تلك الوحـدة التى أقـامـهـا المذهب الحسـابى، وأخرجوا الكثير من أجزائه الهامة باعتبار أنها ليست من الرياضة فى شىء ولا ينبىء عنها الحدس، ومثال ذلك الأعداد الدائرة والأعداد اللامتناهية وبعض الدوال التحليلية حتى نظرية المجاميع **(كانتور)** التى هى أطرف وأعمق اكتشافات الرياضة فى عصورها الأخيرة لما جاءت به من حلول عجيبة فى عمومها لمشاكل اللامتناهى التى اصطدم بها الفكر البشرى منذ فجره. فتبقى بعد ذلك أجزاء متناثرة لا يمكن جمعها بعضها إلى بعض فى نسق موحّد لتسمى الرياضة.

ومن جهة أخرى اضطر أنصار هذا المذهب الحدسى الجديد إلى أن يلجأوا إلى المنطق الصورى الجديد فى كل أبحاثهم بحيث يبدو نقدهم للصلة بين الرياضة والمنطق فى مأزق لا مخرج منه، لأنهم يرفضون المنطق كأسس من جهة، ثم هم يلجأون إليه من جهة أخرى لإقامة نظريتهم. ولقد امتشق **هلبرت** مرة أخرى قلمه ليفند طرائقهم ونتائجهم ويردهم إلى الطريقة الأكسيوماتيكية عنده .

وهكذا نختتم مع **بوانكاريه** بأنه لا سبيل إلى التوفيق بين هذه المذاهب المتصارعة الآن فوق مسرح الأبحاث الخاصة بأسس

الرياضـــة، لأنه لا يمكن التـوفـيق بين منطقـيين وتجـريبـيين، بين ذوى العقلية الكانتورية وذوى العقلية غير الكانتورية، بين من سـماهـم **وليم جيمس** ذوى العقول الرقيقة وذوي العقول الخشنة.

والله أعلم،

والحمد لله رب العالمين.

مراجع مختارة

Aristote : Analytique seconde

Beth, E.W. : Les fondements de Mathematique, Louvin 1950.

Black, M. : The Nature of Mathematics, New York 1952.

Brouwer, L.E.J : Intuitionism and formalism, Bulletin of Am. Math. Soc. Vol. xx, 1913,

Brunschvicg, L. : Les etapes de la philos. Mathem . Paris.

Carnap, R. : Foundations of Logic and Mathematics, International Encyclopedia of Unified Science, 1/9 Chicago 1939.

Chivistek, L. : Bew foundations of Formal Mathemat ics, Journal of symb. Logic, 1938.

Colerus, B. : De Phythagore a Hilbert, Paris 1936.

Couturat L. : 1) L'infini mathematique, Paris 1896.
2) La logique de Loibniz d'apres des documents inedits, paris 1901 .

Darbon : La philosophie Mathematique de B. Russell, Paris (Alcan) .

Gonseth, F. : Les Fondements des Mathematiques, Paris 1926.

Heyting, A. : Intuitionism, An Interoduction, Amster dam, 1956.

Jourdain, ph. : Foundation of Math ., Journal of Math. 1930.

Kleene, S.C. : 1) A theory of positive integers in formal logic, Am. Jour. of Math, 1935.

2) Introduction to Mathematics, New York 1952.

Nicod, J. : A reduction in the Number of the primitive Propositions of logic, proc. Cam. Philos Soc., Vol XIX, pp. 32-41

Peano, G. : Formulaire de Mathematique, Tu rin 1893 -1908.

Poincare, H. : Science et Methode, Paris 1908.

Ramsy, F.P. : The foundation of Mathematics, Kegon Paul 1931.

Russell, B. : 1) Principles of Mathematics, Cambridge 1903.

2) Introduction to Math. Philoso phy, London, 1919.

Russell & Whitehead : Principia Mathematica, 3 vols. Cambridge 1910 - 1913.

Tannery, J. : De la methode dans les sciences; ch. sur les math .

Tarski, A. : Introduction to Mathematical log ic, 1938.

فهرس المصطلحات والأعلام

باللغات الأوروبية

BOLL, FERDINAND	بول (فـرديناند)
BOLZANO	بـولـزانـو
BOOLE, GEORGE	بول (جورج)
BRAHMAGUPTA	براهماجوبتا
BRUNSCHVICG	برنشـــفـج

C

Calcul	حـسـاب
CANTOR	كـانتـور
Caracteristique universelle	أبجدية عامة
Cardinal number	عـدد عـاد أو أسـاسى
Class	طائفة أو فـئـة
COLERUS	كـوليـروس
COLLINGWOOD	كونلـجوود
Commutation	تبادل المواضع
Complex number	عدد مركب
COMTE	كـونت
Concepts Derivés	تصورات مشتقة (بالتعريف)
Concepts Primitifs	تصورات ابتدائية
Congruence	مطابقـة
Condtant	ثابت – مسـتمر
Construction	إنشـاء ، عمل
Continu	مـتـصل
Continuite geometrique	اتصـال هندسـى
Continouus deformation	تشويه مستمر
CVontinuum	اتصـال
Convergente	مـتجمع

Coordinates	الإحـداثيـان
Courbe	منـحى الدالة
COUTURAT	كـــوتوراه
CROCE	كروتشى
Curve	منـحنى الـدالة

D

D'ALEMBERT	دالامبير
DEDEKIND	ديدكـنـد
Deductive science	علـم اسـتـنبـاطى
Deductive system	نسق اسـتنبـاطى
Definition by abstraction	تعـريف بالتـجـريد
DEmonstrative science	علـم برهـانى
Deplacement	نقلة
DESCARTES	ديـكـارت
Differentiation	تفاضـل (حسـاب)
DILTEY	دلـتـى
DIOPHANTE	ديوفانت
Dirichelet, Lejeune	ديرشليه (لوجين)
Discontinuous function	انفـصـــال
Doctrine arithmetisante	المذهب الحسـابى
DRYFUS	ديرفوس
DURKHEIM	دوركـيـم

E

Elementary calculus of propositions	حساب القضـايا الأولية
Elements	الأصـــول

Enonce	منطوق
ENTIQUES	إنريكس
Entier	العدد الصحيح
Equality	مساواة
Equivalence	معادلة
Erkenntnts	مجلة علمية
EUCLIDE	أقليدس

F

Finite number	العدد المنتهى
Fonction	دالة
Fonction analytique	دالة تحليلية
Formal	صورى
Formalism	صورية
Foundation of ,athematics	أسس الرياضة، أصولها
Function	دالة

G

GAUSS	جوس
Geimetrie analytique	هندسة تحليلية
Geometry of situation	هندسة الوضع
GOBLOT	جوبلو
GRASSMANN	جراسمان

H

HADAMARD	هادامار
HAEKEL	هاينكل

HALSTED	هلشتد
HAMILTON, ROWAN	هاملتـون (روان)
HANTIGTON	هنتجتون
HAUSSDORFF	هاوسدورف
HEGEL	هيـجل
HERMITE	هرميت
HILBERT	هلبـرت
Homogene	مـتجـانس
Hypothese	فـرض

I

Indentite	ذاتية ، هوية
Imaginary number	عـدد تخـيلى
Implication	تضــمن
Inclusion	احـتـواء
Incommensurables	الأعداد أو الأبعـاد غير المتقايسـة
Independence	اسـتـقـلال
independence ordonnee	استقلال مرتب
Induction mathematique	استقراء رياضى
Induction par reccurence	استقراء بالتكرار
Infini	لامــتناهٍ
Infinite number	عـدد غـيـر مـتناهٍ
Integer	عدد صحيح
Integration	تكامل (حـسـاب)
Intuition	حـدس، بداهة
Intuition empirique	حـدس تجـريبى
Intuition spaciale	حـدس مكانى
Intuitionism	المذهب الحـدسـى

Irrational number	العدد الأصم
Isomorphe	لا كيف له

J

JAMES, W.	جيمس (وليم)
JEVONS	جيفنز
JOURADIN, ph	جوردين (فيليب)

K

KANT	كانط
KLEENE	كلين
KLEIN, F.	كلاين (فيلكس)
KONIG	كونج
KRONECKER	كرونكر

L

LAGRANGE	لاجرانج
LALANDE	لالاند
LANDEAU	لاندو
Law of association	قانون الاشتراك أو الاقتران
Law of distribution	قانون التوزيع
Law of duality	قانون الثنائية
LEBESGUE	لوبيج
LEGENDRE	لوجاندر
Relation	علاقة
LEVI, Beppo	ليفى (بيو)
Limite	حد

LOBATCHEVSKI	لوباتشفسكى
localisation	تعيين المكان
logistic	لوجستيقا أو المنطق الرياضى
Logistic theory	المذهب أو النظرية اللوجستيقية
Logistica numerosa	حساب الأعداد
Logistica speciosa	حساب الحروف (الجبر)
Logistique	لوجستيقا

M

MARX	ماركس
Methematical logic	المنطق الرياضى
Mathematique universelle	الرياضة العامة
MAUSS	موس
MENON	مينون
MERAY	ميراى
Mesure	قياس
Metalogic	ما وراء المنطق
Metamathematics	ما وراء الرياضة
Metrical geometry	هندسة قياسية
Methode genetique	طريقة تكوينية أو توليدية
Methodology	علم مناهج العلوم
MOKDERUP	مولدروب

N

NEWTON	نيوتن
NICOD	نيكود
Nominalists	اسميّون

Non - euclidian geometries	هندسات غير أقليدية
Non-metrical geometries	هندسات غير قياسية
Neo - Intuitionism	المذهب الحدسى الجديد

O

Order	نظام، ترتيب
Ordinal	عدد مرتب
Ordre	نظام، ترتيب

P

PADOA	بادوا
PADCH	باش
PEANO	بيانو
PEIRCE, CH. S.	بيرس (شارل ساندرس)
Permutation	تبادل المواضع
PIERI	بييرى
PLATON	أفلاطون
Philosophy of natural sciences	فلسفج العلوم الطبيعية
philosophy of physical sciences	فلسفة علوم الطبيعة
Philosophy of sciences	فلسفة العلوم
PHYTAGORE	فيثاغور
POINCARE	بوانكاريه
Postulat	مسلمة ، مصادرة
Postulat implicit	مسلمة مضمرة
Postulational system	نسق المسلمات
Projective geometry	هندسة إسقاطية
Projective transformation	تحويل إسقاطى

Proposition	قضية
Powers	قـــوى ، أسس
Puissances	قوى ، أسس
Pure Formalism	صورية بحتة أو خالصة

Q

Qualitative geometry	هندسة كيفية
Quantite impossible	كم مستحيل
Quaternions	الأعداد الرباعية

R

Reflexion	انـعـكـاس
RHIND	رنـد
REIMANN	ريمان
RENAN	رينان
Rotation	استدارة، دوران
RUSSELL	راسـل

S

SACCHERI	ساكيرى
SCHRODER	شـــرويدر
Signs	علامات
Space	مـكـان
Symbolic	رمـزى
Symbolic logic	منطقى رمـــزى
Synthese	تركـيب
Systeme categorico - deductif	نسق يقينى استنباطى

Systeme hypothetico - deductif	نسق فرضى استنباطى
TANNERY, J.	تانرى
TAURINAUS	تورينوس
Tautology	توتولوجيا (قانون اللغو)
Theoreme	نظرية
Theoria	مجلة
Theori des ensembles	نظرية المجاميع
Theory of cut	نظرية القطع
Theory of Functions	نظرية الدوال
Theory of groups	نظرية المجموعات
Theory of Limit	نظرية الحد
Theory of set	نظرية المجاميع
Time	الزمان
Transfinite number	العدد غير المتناهى، اللامتناهِ
Transformation	تحويل

V

VAILATI	فيلاتى
VAriable	متغير
Variante	متغير
Vecteur Libre	متجه حر
VELBEN	فلبن
VENN	فين
Verite Externe	حقيقة خارجة
Verite interne	حقيقة باطنة
VIETE	فيت

W

Z

المحتويات

الكتاب القادم

حى بن يقظان

(أربع صياغات تراثية)

د. يوسف زيدان

رقـم الإيـداع : ٥٥٠١ / ٩٧

الترقيم الدولى : 2-818-235 -977

شركة الأمل للطباعة والنشر
ت : ٣٩٠٤٠٩٦



أسس الرياضة أو فلسفتها، اصطلاحان لموضوع واحد شغل الفكر الغربي طويلا، في حين استطاع ثابت الفندي أن يضعه لنا بدقة، كنموذج فكري أصيل يتناول العديد من المشكلات المتعلقة بالرياضيات حيث صدر هذا الكتاب في الأربعينيات، كأول مرجع لهذا التخصص بالعربية يستخدم في أوروبا، في الوقت الذي عانت فيه الأطروحات الغربية المقدمة في هذا المجال، من السطحية والتعقيد الفني. وفي إطار فلسفي واضح يقدم الفندي هذا الكتاب بهدف البحث في قضية فلسفة الرياضيات، اعتمادا على انعدام فكرة النظرية المثالية في أصول الرياضة.

5



الفلسفة والعلم

الثمن : جنيهان

الأمل للطباعة والنشر